

$n = 1$ -re:  $5 = 1^2 + 2^2$ ,  $n = 2$ -re:  $5^2 = 3^2 + 4^2$ . Ha már most  $n$  páratlan:  $n = 2k + 1$  ( $k$  nemnegatív egész), akkor  $5^n = 5^{2k} \cdot 5 = 5^{2k} \cdot 1^2 + 5^{2k} \cdot 2^2 = (5^k)^2 + (2 \cdot 5^k)^2$ ; páros  $n$ -re pedig  $n = 2k$  ( $k$  pozitív egész):  $5^n = 5^{2k-2} \cdot 5^2 = (3 \cdot 5^{k-1})^2 + (4 \cdot 5^{k-1})^2$ . Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A bizonyítás mutatja, hogy 5 helyett bármely olyan szám vehető alapnak, amely maga is, és négyzete is írható két természetes szám négyzetének összegeként. Ilyenek:  $13(= 2^2 + 3^2)$ , és  $13^2 = 5^2 + 12^2$ ,  $17(= 1^2 + 4^2)$ , és  $17^2 = 8^2 + 15^2$ ,  $29(= 2^2 + 5^2)$ , és  $29^2 = 20^2 + 21^2$ , ...,  $45(= 3^2 + 6^2)$ , és  $45^2 = 27^2 + 36^2$ ,  $50(= 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2)$ , és  $50^2 = 14^2 + 48^2 = 30^2 + 40^2$ , ...

Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VI. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Ha  $m$  két különböző természetes szám négyzetének összege:  $m = a^2 + b^2$ , akkor a második feltételnek ( $m^2$  ilyen felbonthatóságának) vizsgálatát mellőzhetjük, mert ez az  $m^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$  átalakítás folytán teljesül. Eszerint páratlan  $m$ -re elég az  $a^2 + b^2$  előállítás.  $a = b$  esetre azonban csak akkor biztosítja az említett átalakítás  $m^2$ -re a második feltétel teljesülését, ha egyik négyzetszámnak a 0-t is megengedjük. (Ebben az értelemben viszont minden szám négyzete két négyzetszám összegeként írható.) Pl.  $18 = 3^2 + 3^2$ , és, mint könnyen belátható,  $18^2 = 324$  csak a  $0^2 + 18^2$  alakban írható két négyzetszám összegeként.

Detre Villő (Budapest, Lorántffy Zs. úti lg. II. o. t.)

2. Több dolgozat hivatkozott a következő tételre: *egy természetes szám akkor és csak akkor állatható elő két négyzetszám összegeként, ha törzsszámhatványok szorzatára való felbontásában egy  $4k + 3$  alakú prímszám sem szerepel páratlan hatványon.*<sup>1</sup> Az 1. megjegyzésből látjuk, hogy négyzetszámon, egész szám négyzetén nem szabad okvetlenül természetes szám négyzetét érteni. Az idézett versenytételhez fűzött 2. jegyzetből – „A Waring-féle problémakörrel” – láthatóan a kérdés az, hogy bizonyos alakban előállítható természetes számoknak természetes számok négyzetösszegeként való előállításához *legfeljebb* hány tag szükséges. Feladatunk viszont – kimondatlanul is –  $5^n$ -nek pontosan két természetes szám négyzetének összegeként való előállíthatóságára kívánt bizonyítást, illetőleg hasonló tulajdonságú alapok megadását kívánta.

3. Több dolgozat az  $5^1 = 1^2 + 2^2$  egyenlőségből és az  $5^k = a^2 + b^2$  ( $a, b$  természetes számok) feltevésből a teljes indukció módszerével kívánta bizonyítani az állítást, mondván, hogy  $5^{k+1} = 5 \cdot 5^k = 5a^2 + 5b^2 = (a + 2b)^2 + (2a - b)^2$ . Itt  $a + 2b$  természetes szám, de  $2a - b$  abszolút értéke 0 is lehet, éspedig ha  $b = 2a$ , ami  $5^k = a^2 + 4a^2 = 5a^2$  alapján  $k = 2j + 1$  és  $a = 5^j$  esetén teljesül.

<sup>1</sup>L. pl. *Hajós-Neukomm-Surányi*: Matematikai versenytételek, II. rész, 59. o., Tan-könyvkiadó, 1957. Középiskolai Szakköri Füzetek.