

A két szomszédos egész szám kisebbikét x -szel jelölve azt kell bizonyítanunk, hogy $N = x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2$ teljes négyzet. Az első két tag összegének $2x^2 + 2x + 1 = 1 + 2x(x+1)$ alakjában ráismerünk a szorzat $2 \cdot 1$ -szeresére és az 1 szám négyzetére, ennél fogva N a szorzatnál 1-gyel nagyobb számnak a négyzete: $N = [1 + x(x+1)]^2$.

A bebizonyított állításhoz hasonlóan nem egész számokról nem mondhatunk ki, mert azok között nem beszélhetünk szomszédosokról: bármely két (különböző) szám között számtalan sok további szám van. Egyébként az $x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 = [1 + x(x+1)]^2$ azonosság bizonyításában nem használtuk ki, hogy x és vele a további két négyzet alapja egész, ezért az azonosság bármely x számra igaz. Ezt azonban szóban csak így mondhatjuk ki: egy számnak, *a nála 1-gyel nagyobb* számnak, valamint szorzatuknak négyzetösszege egyenlő a szorzatuknál 1-gyel nagyobb szám négyzetével.

Szidarovszky Ágnes (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az azonosságban a jobb oldal alapját így is meghatározhatjuk: Harmadik tagját is kifejtve és rendezve: $N = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Itt a legmagasabb és a legalacsonyabb fokú tag x^2 -nek, ill. 1-nek négyzete, N tehát úgy lehet teljes négyzet, ha további tagjai egy a rendezett alapban x^2 és 1 közötti, elsőfokú tagból származnak, vagyis ha $N = (x^2 + kx + 1)^2$. Ezt kifejtve és a további három tag egyenlőségét követelve a $2k = 2$, $k^2 + 2 = 3$, $2k = 2$ egyenletrendszerre jutunk. Ebből $k = 1$, és így $N = (x^2 + x + 1)^2$.

Kopornoky Zsolt (Budapest, I. István g. II. o. t.)

2. Több dolgozat a rendezett többtagúakból való négyzetgyökvonás eljárásával állapította meg az előbbi kifejtett alakból az $x^2 + x + 1$ kifejezést.