I. Az üres mezők kitöltésével az alábbi T_1 táblázat adódik, benne t az $a+b+c+d$ összeget rövidíti. Legyen a jobb alsó sarokelemhez tartozó aldetermináns: $A_{33} = ad - bc = D$. A többiek gyorsabb, egyszerűbb kiszámításában jól alkalmazhatjuk az idézett cikk IV. fejezetében megismert 10. és 11. tulajdonságot.[1] Pl.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a & s-a-c \\ s-a-b & t-s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & s-c \\ s-a-b & t-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & s-c \\ s-a-b & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & s-c \\ s-b & s+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & s \\ s-b & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -c \\ s-b & d \end{vmatrix} =$$

$$= s(a+b-s) + ad - bc + sc = s(a+b+c-s) + D = s(t-d-s) + D.$$

Hasonlónak adódnak az A_{22}, A_{12} és A_{21} aldeterminánsok, amelyeknek ugyancsak *egy* eleme való az a, b, c, d számok közül. Ugyancsak hasonló szerkezetű A_{13}, A_{23}, A_{31} és A_{32}, amelyek A_{33}-ból egy-egy sort, vagy oszlopot, két elemet tartalmaznak. Pl.

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} d & s-b-d \\ c & s-a-c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & s-b \\ c & s-a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & s \\ c & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix} = s(c-d) + D.$$

A teljes „új” táblázatot T_2 mutatja, ezen valóban mindhárom sor és oszlop összege egyenlő, éspedig

$$S = s(b+c-a-d) + 3D, \tag{1}$$

amit bizonyítanunk kellett. (Természetesen a T_2-ből ugyanígy képezett új T_3 is örökölné a sor- és oszlopösszegek egyenlőségének tulajdonságát.)

$$\begin{array}{ccc} & T_1 & \\ d & b & s-b-d \\ c & a & s-a-c \\ s-c-d & s-a-b & t-s \end{array} \quad \left\| \begin{array}{r|r|r} \multicolumn{3}{c}{T_2} \\ s\big[(t-s)-d\big]+D & s\big[b-(t-s)\big]+D & s(c-a)+D \\ s\big[c-(t-s)\big]+D & s\big[(t-s)-a\big]+D & s(b-d)+D \\ s(b-a)+D & s(c-d)+D & D \end{array} \right\|$$

Pl. $a=5$, $b=-4$, $c=1{,}5$, $d=6$ és $s=10$-zel (1)-ből $S=-27$, ahogyan a számítások elvégzése is mutatja:

$$T_1: \begin{array}{rrr} 6 & -4 & 8 \\ 1{,}5 & 5 & 3{,}5 \\ 2{,}5 & 9 & -1{,}5 \end{array} \qquad T_3: \begin{array}{rrr} -39 & 11 & 1 \\ 66 & -29 & -64 \\ -54 & -9 & 36 \end{array} \qquad \text{és} \quad T_3: \begin{array}{rrr} -1620 & 1080 & -2160 \\ -\ 405 & -1350 & -945 \\ -\ 675 & -2430 & 405 \end{array}$$

II. T_2 fő-, ill. mellékátlójának f_2, ill. m_2 összege akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$f_2 = s(2t-2s-a-d) + 3D = s(t-s-3a+b+c) + 3D = m_2, \tag{2}$$

vagyis $f_2 - m_2 = s(t-s+2a-b-c-d) = s(3a-s) = 0$, tehát ha vagy $s'=0$, vagy $s''=3a$. (Ez a két érték nem különböző, ha $a=0$.) $s'=0$ mellett $f_2=m_2=S$, mert így T_2-nek minden eleme D. Megfordítva: akár $s=0$, akár $s=3a$ elegendő $f_2=m_2$ teljesüléséhez.

$s'=0$ mellett T_1 átlóinak összege: $f_1' = 2a+b+c+2d$, ill. $m_1' = a-b-c-2d$, ezek általában nem egyenlők, csak ha $a+2b+2c+4d=0$, ehhez tehát a, b, c, d közül csak hármat választhatunk tetszés szerint. Hasonlóan $s''=3a$ mellett is általában $f_1'' = -a+b+c+2d \neq m_1'' = 7a-b-c-2d$, csak ha $-8a+2b+2c+4d=0$. ($a=0$-val – mint a fenti észrevételből várható, – fennáll: $f_1' = f_1''$ és $m_1' = m_1''$).

Pl. ismét $a=5$, $b=-4$, $c=1{,}5$ és $d=6$-tal, de most $s=15=3a$-val V_2 mindkét átlóján -252 az összeg, V_1 -ben viszont $f_1 = -4{,}5 \neq 25{,}5 = m_1$:

$$V_1: \begin{array}{rrr} 6 & -4 & 13 \\ 1{,}5 & 5 & 8{,}5 \\ 7{,}5 & 14 & -6{,}5 \end{array} \text{-höz:} \qquad V_2: \begin{array}{rrr} -151{,}5 & 73{,}5 & -16{,}5 \\ 156 & -136{,}5 & -114 \\ -99 & -31{,}5 & -36 \end{array}$$

III. d törlése után felesleges volna számításainkat újra kezdenünk, hiszen az így módosuló T_1^*-ben is mindazt teljesítenünk kell, mint T_1-ben, sőt többet annál (átlók!). Elég tehát T_1-ből továbbhaladnunk, és benne meghatároznunk az ismeretlenné vált d és s-nek a tovább is szabadon választható a, b, c-vel való azt a kifejezését, amelyre $f_1^* = m_1^* = s$. Így a módosult T_2^*-ben is csak az átlók összegeit kell vizsgálnunk, a sorok és oszlopok összegei egyezni fognak, mert az I. rész szerint öröklik T_1^*-nek ezen tulajdonságát. Az

$$f_1^* = d + a + (a+b+c+d-s) = s,$$
$$m_1^* = (s-c-d) + a + (s-b-d) = s$$

egyenletrendszerből rendezéssel

$$\left.\begin{array}{r} 2d - 2s = -2a-b-c, \\ -2d + s = -a+b+c, \end{array}\right\} \quad \text{innen pedig} \quad (3) \quad \left\{\begin{array}{l} s = 3a, \\ d = 2a - (b+c)/2. \end{array}\right.$$

[1] XV. kötet, 80. o.

Ezekkel táblázataink így módosulnak

$$T_1^*:\quad \begin{array}{ccc} 2a-(b+c)/2 & b & a-(b-c)/2 \\ c & a & 2a-c \\ a+(b-c)/2 & 2a-b & (b+c)/2 \end{array}$$

$$T_2^*:\quad \begin{array}{c|c|c} -4a^2-bc+2{,}5ab+2{,}5ac & 2a^2-bc+ab-2ac & -a^2-bc-0{,}5ab+2{,}5ac \\ 2a^2-bc-2ab+ac & -a^2-bc+ab+ac & -4a^2-bc+4ab+ac \\ -a^2-bc+2{,}5ab-0{,}5ac & -4a^2-bc+ab+4ac & 2a^2-bc-0{,}5ab-0{,}5ac \end{array}$$

Az utóbbiban mind a sorok és oszlopok, mind az átlók összege $-3a^2-3bc+3ab+3ac=-3(a-b)(a-c)$, kimondhatjuk tehát, hogy az új táblázat az eredeti táblázatból az átlókra vonatkozó többlettulajdonságot is örökli.

Egy számpélda $a=1$, $b=2$, $c=2$-vel, amiből $d=0$ és $s=f_1^*=m_1^*=3$, továbbá $S=f_2^*=m_2^*=-3$:

$$(4)\qquad T_1^*:\ \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \qquad\qquad T_2^*:\ \begin{array}{rrr} 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{array}$$

Horváth Kálmán (Kaposvár, Táncsics M. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A sorösszegek és oszlopösszegek egyenlőségének az új táblázatba való átöröklődését a táblázatok felírása nélkül is bebizonyíthatjuk. Legyen T_1 olyan $3\cdot 3$ mezős táblázat, amelyben az i-edik sor k-adik mezején az a_{ik} szám áll (i, $k=1$, 2, 3), és amelyben minden sor és oszlop összege s. T_1-et determinánsnak tekintve jelöljük értékét A-val, aldeterminánsait pedig A_{ik}-val. Az ezekkel felírt T_2-ben $s\neq 0$ esetén bármelyik sor, oszlop összege A/s, $s=0$ esetén pedig $3A_0$, ahol A_0 a T_2 valamennyi elemének közös értéke. A bizonyítást mindkét esetben elég az első sorra elvégezni, ez a felcserélési tételek alapján a többi sorokra, oszlopokra szintén érvényes.

$s\neq 0$ esetén készítsünk T_1-ből egy T_1' táblázatot úgy, hogy az első sorhoz hozzáadjuk a másodikat és a harmadikat. Ekkor T_1' első sorának minden eleme s, a további két sor változatlan. Így T_1' első sorának aldeterminánsai is változatlanok, a determináns értéke pedig a fent idézett tulajdonságok folytán $A'=A$. Így T_1'-t az első sora szerint kifejtve $sA_{11}+sA_{12}+sA_{13}$, és innen valóban $A_{11}+A_{12}+A_{13}=A/s$.

$s=0$ esetén T_1-ben bármelyik sor bármelyik két elemének összege a sor még nem említett elemének -1-szerese. Ezért

$$A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21}+a_{22} \\ a_{31} & a_{31}+a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=A_{12}, \\[2ex] \begin{vmatrix} a_{21}+a_{22} & a_{22} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=A_{11}. \end{cases}$$

Hasonlóan látható, hogy T_2-nek bármely két eleme egyenlő, és így sorainak és oszlopainak (továbbá átlóinak is) összege valóban egy aldetermináns értékének 3-szorosa.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

2. A (3)-beli $s=3a$ kifejezés ismerete után a megoldás II. részének eredménye szerint T_2^*-ben $f_2^*=m_2^*$, és közös értékük az (1) módosulásával adódó S^*-gal is megegyezik. Ugyanis (1) és (2) szerint $S^*=f_2^*$-höz elegendő a zárójelek első két tagjának megegyezése, ez pedig teljesül, mert a (3) kifejezésekkel: $2t-2s=2a+2b+2c+2\big[2a-(b+c)/2\big]-2\cdot 3a=b+c$.

Bácsy Zsolt (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)

3. Ha még T_2-t is determinánsnak tekintjük, akkor szokás T_2-t (tágabb értelemben) T_1 *reciprok determinánsának* nevezni. (Szigorúbb értelemben egy $A\neq 0$ értékű, tetszés szerinti rendszámú determináns reciprok determinánsa az a determináns, amelyben az i-edik sor k-adik eleme nem A_{ik}, hanem A_{ik}/A; meg lehet mutatni, hagy ennek értéke $1/A$.)[2] – Szokás másrészt (tágabb értelemben) n-edrendű ***bűvös négyzet***nek nevezni minden olyan n sorra és n oszlopra osztott és minden mezején egy-egy számot tartalmazó számtáblázatot, melynek minden sorában, minden oszlopában és mindkét átlója mentén álló számok összege ugyanannyi. – Eszerint T_1^* és T_2^* 3-adrendű bűvös négyzetek. Hasonlóan T_1 és T_2 (melyekben az átlók összege általában nem egyenlő a sorokéval) 3-adrendű *félig bűvös négyzetek.* E két fogalom felhasználásával eredményeink így is kimondhatók. I.: 3-adrendű félig bűvös négyzetet determinánsnak tekintve reciprok determinánsa ugyancsak félig bűvös négyzet; III.: 3-adrendű bűvös négyzetet determinánsnak tekintve reciprok determinánsa ugyancsak bűvös négyzet.

4. Az 1. megjegyzéshez hasonlóan igazolható, hogy n-edrendű, félig bűvös négyzetet determinánsnak tekintve reciprok determinánsa ugyancsak n-edrendű félig bűvös négyzet; viszont (egészen) bűvös négyzetekre a III. állítás

[2] Eszerint a fenti T_2, T_3-ra $T_2=T_1^3\cdot 1/T_1=T_1^2$ és $T_3=T_2^2$. Másrészt T_2 „reciproka” T_1-nek, T_3 pedig T_2-nek, ezért T_3 minden eleme T_1 megfelelő eleménél T_1-szer nagyobb.

$n>3$ esetén *nem* érvényes. Igazolásul elég egy számpélda; ha

$$T_1^*:\begin{vmatrix} 2 & 4 & 13 & 15 \\ 14 & 16 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 10 & 12 \\ 11 & 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{akkor} \quad T_2^*:\begin{vmatrix} -392 & 288 & 356 & -188 \\ -120 & 288 & -324 & 220 \\ 424 & -256 & -868 & 764 \\ 152 & -256 & 900 & -732 \end{vmatrix},$$

és ez utóbbiban a két átlós összeg sem egymással, sem a sorok és oszlopok 64-es összegével nem egyenlő.

5. Több tanuló tévesen használta az aldetermináns fogalmát; a helyes kifejezést még megszorozta avval az elemmel is, amelyhez az aldetermináns tartozik, – ahogyan ez a kifejtésben történik. Mások hibáinak az a tévhit a sarkköve, hogy ha egy determinánsból a fent is használt átalakításokkal egy vele egyenlő értékű másik determinánst írunk fel, akkor az aldeterminánsok értéke sem változik meg. (Győződjünk meg számbeli példákon ennek valótlanságáról!)