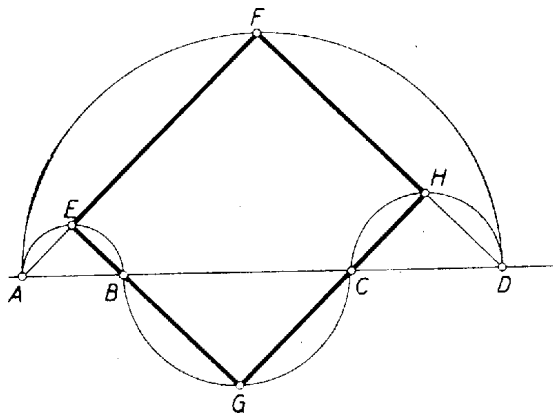


I. megoldás: Az ABE , ADF , CBG és CDH háromszögek szerkesztésükénél fogva derékszögűek és egyenlő szárúak, így A , B , C , D -nél fekvő szögeik 45° -osak. Ezért az A , E , F , az E , B , G , a G , C , H és a D , H , F ponthármasok egy-egy egyenesbe esnek. Továbbá ennek a négy egyenesnek mindegyike merőleges a következőre és az utolsó az elsőre. Ennélfogva az $EFHG$ négyszög derékszögű.



1. ábra

Legyen az AB , CB és CD szakaszok hossza rendre $2e$, $2f$, $2g$; így $AD = 2(e + f + g)$. Ekkor négyszögünk oldalai: $EG = EB + BG = \sqrt{2}e + \sqrt{2}f = \sqrt{2}(e + f)$ és $GH = GC + CH = \sqrt{2}f + \sqrt{2}g = \sqrt{2}(f + g)$. Ezekből a területe:

$$t_1 = EG \cdot GH = 2(e + f)(f + g)$$

Másrészt félköraink sugarai rendre e , $e + f + g$, f , g . Az általuk bezárt területet úgy kapjuk, hogy az AD és CB átmérő fölötti félkörök területének összegéből kivonjuk az AB és CD átmérő fölötti félkörök területének összegét. Az $\pi/2$ közös tényezőt mindjárt kiemelve:

$$(1) \quad t_2 = [(e + f + g)^2 + f^2 - e^2 - g^2] \pi/2.$$

Alakítsuk szorzattá a zárójelben az első és harmadik, valamint a második és a negyedik tagot, majd emeljük ki az adódó $(f + g)$ közös tényezőt. Így

$$t_2 = [(2e + f + g)(f + g) + (f - g)(f + g)] \pi/2 = \\ = (2e + f + g + f - g)(f + g) \pi/2 = (e + f)(f + g) \pi.$$

A két terület aránya: $t_1 : t_2 = 2 : \pi$, és ez valóban független az AB , BC , CD szakaszok hosszától.

Szendrői Csaba (Sopron, Kempelen F. Gépip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Az I. megoldást, miután megállapítjuk, hogy a négy ponthármas egy-egy egyenesen van, így is folytathatjuk. Az $EFHG$ négyszög t_1 területét úgy kaphatjuk, hogy az ADF és BCG egyenlő szárú derékszögű háromszögek területének összegéből kivonjuk az ABE és CDH egyenlő szárú derékszögű háromszögek területének összegét. Jelöljük ezeket általában $t(c)$ -vel, c helyére mindig a megfelelő átfogót írva. Ekkor

$$t_1 = t(AD) + t(BC) - t(AB) - t(CD).$$

Hasonlóan összeadásokkal és kivonással kapjuk a görbevonalú idom területét a szóban forgó félkörök területéből. Jelöljük a c átmérőjű félkör területét $T(c)$ -vel így:

$$t_2 = T(AD) + T(BC) - T(AB) - T(CD).$$

Már most általában:

$$t(c) : T(c) = \frac{c^2}{4} : \frac{c^2 \pi}{8}, \quad \text{és így} \quad t(c) = \frac{2}{\pi} T(c).$$

Ennek alapján

$$t_1 = \frac{2}{\pi} T(AD) + \frac{2}{\pi} T(BC) - \frac{2}{\pi} T(AB) - \frac{2}{\pi} T(CD) = \frac{2}{\pi} t_2, \quad \text{tehát} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{\pi}.$$

Evvel az állítást bebizonyítottuk.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. Gyak. g. II. o. t.)

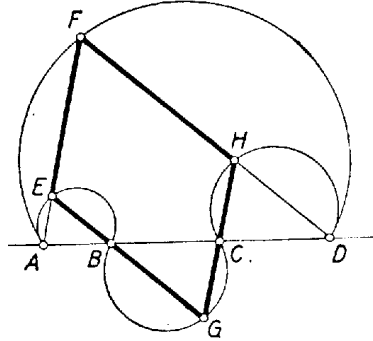
Megjegyzések. 1. A II. megoldás gondolatával és az I. megoldás jelöléseivel

$$t_1 = \frac{1}{4} [(2e + 2f + 2g)^2 + (2f)^2 - (2e)^2 - (2g)^2] = \\ (e + f + g)^2 + f^2 - e^2 - g^2$$

és ez (1)-gyel egybevetve átalakítás nélkül vezet a kívánt eredményhez.

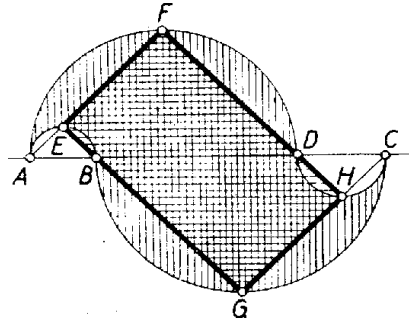
2. A feladat állítását többféleképpen is lehet általánosítani.

Akkor is érvényes az állítás, ha egyenlő szárú derékszögű háromszögek helyett olyan hasonló és azonos körüljárási értelmű ABE , ADF , CBG , CDH háromszögeket írunk az AB , AD , CB , CD szakaszokra, amelyeknek e szakaszok megfelelő oldalai, a félkörívek helyett viszont a háromszögek köré írt körnek az E , F , G , H csúcsot tartalmazó AB , AD , CB , CD ívét (2. ábra).

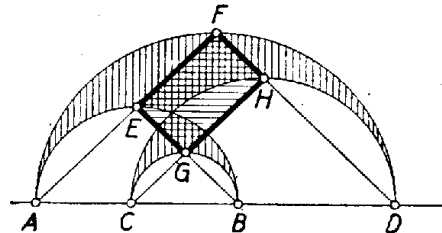


2. ábra

Ha az A , B , C , D pontok sorrendje más, akkor amely szakasz végpontjai az eddigivel szemben fordított sorrendben következnek egymásra, arra a félkört az egyenesnek az eddigivel átellenes oldalán írva ugyancsak érvényes marad az állítás. Ha ilyenkor a 4 félkör 4 csúcsot alkot, akkor a görbevonalú idom két részből áll (3–4. ábrák).



3. ábra



4. ábra