Hogy a kifejezésnek értelme legyen, már első látásra fel kell tennünk, hogy az a, b, c számok közül kettő-kettőnek sem az összege, sem a különbsége nem 0, más szóval a, b, c abszolút értékben különböző számok. Jelöljük K egymás utáni tagjait K_1, K_2, K_3-mal. K_2 és K_3 az előttük álló tagból úgy is előállíthatók, hogy a, b, c helyére rendre b, c, a-t írunk, ezért egyelőre elég K_1-et egyszerűsítenünk. K_1 számlálója, ill. nevezője a törtek összevonásával

$$\frac{(b+c)(c+a)-2(a+b)(c+a)+(a+b)+(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{b^2+c^2-2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$\frac{(b+c)(c-a)-2(b-a)(c-a)+(b-a)(b+c)}{(b-a)(b+c)(c-a)}=\frac{b^2+c^2-2a^2}{(b-a)(b+c)(c-a)}.$$

Hogy az utóbbi, valamint K_2 és K_3-nak a fentiek szerint ebből előállítható nevezői is 0-tól különbözők legyenek, fel kell tennünk, hogy

$$b^2+c^2-2a^2\neq 0,\quad c^2+a^2-2b^2\neq 0,\quad a^2+b^2-2c^2\neq 0. \tag{1}$$

Így $b^2+c^2-2a^2$-nel egyszerűsítve

$$K_1=\frac{(b-a)(b+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

(A $b+c$ tényezővel egyszerűsíteni csak látszateredmény volna, mert a további közös nevezőben ez a tényező is fellép.) Most már a fent említett szabályszerűség felhasználásával

$$K=\frac{(b-a)(b+c)(c-a)}{(a+c)(b+c)(c+a)}+\frac{(c-b)(c+a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}+\frac{(a-c)(a+b)(b-c)}{(c+a)(a+b)(b+c)}.$$

A nevezők csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát egyenlők, ezért egyelőre elég képeznünk a számlálók összegét. A várható összevonási lehetőségekre tekintettel jónak látszik beszorozni; ennek során mindegyik számláló három kéttagújának szorzata $2^3=8$ tagot ad. Az első számláló így írható:

$$S_1=a^2b+a^2c+b^2c+bc^2-ab^2-ac^2-2abc,$$

ennek alapján

$$S_2=b^2c+b^2a+c^2a+ca^2-bc^2-ba^2-2abc,$$

$$S_3=c^2a+c^2b+a^2b+ab^2-ca^2-cb^2-2abc,$$

és összegük

$$S=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc.$$

A tagok felírása nélkül is látható, hogy a közös nevezőbeli beszorzásnál a $-6abc$ tagtól eltekintve S-nek valamennyi tagja előáll. Pl. a^2b úgy, hogy $(a+b)(b+c)(c+a)$ gondolatban való képezésénél az egymás utáni zárójelekből az első, első, második tagot szorozzuk össze. Két zárójelnek első és egynek második tagját összeszorozva mindig x^2y „típusú” tagot kapunk, és akkor is, ha kettőből a másodikat és egyből az elsőt vesszük ki, és ez a 6 tag egymástól különböző, akárcsak S-nek első 6 tagja. A nevező hátralevő szorzatai $2abc$-t adnak – a 3 első és a 3 második tag szorzata –, eszerint az S összeg $-8abc$-vel tér el a nevezőtől, ennyivel „kisebb” nála:

$$S=(a+b)(b+c)(c+a)-8abc,$$

és így

$$K=1-\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \tag{2}$$

Az $a=5$, $b=7$, $c=9$ számok abszolút értékben különbözők; az (1) kifejezések közül nyilván elég $a^2+c^2-2b^2$ értékét kiszámítani, amelyben a nagyságra nézve középső 7 adja a kivonandót, de ez sem 0, tehát K-nak van értelme. (2)-ből $K=1/16=0{,}0625$, ennek kiszámítása céljára 3 összeadást, $2+3=5$ szorzást, 1 osztást és 1 kivonást végeztünk, összesen 10 műveletet.

K-nak az eredeti alakból való számítása során a, b, c-ből elsősorban 3 összeget és 3 különbséget képeznénk, ezekből 6 reciprok értéket, majd az összegek reciprok értékének megkétszerezését; ez eddig 15 művelet. Az így előkészített „elemekből” mind a 6 „nagy” számláló és nevező összeállítása $2-2$ összevonást igényelne, ezt 3 osztás követné és a számítást 2 összeadás zárná be. Mindez együttvéve $15+12+3+2=32$ művelet.

Az $a=5$, $b=7$, $c=1$ adathármas mellett a „gyanús” $b^2+c^2-2a^2$ érték 0-nak bizonyul, K-nak nincs értelme.

Az algebrai átalakítások előnye az első példában abban mutatkozott meg itt, hogy K értékét az egyszerűbb alakból jóval kevesebb művelettel számíthattuk, a második példában pedig abban, hogy jelentős mennyiségű hiábavaló számítást takarítottunk meg. Természetesen előnyt nyújtott K szimmetrikus voltának felismerése, valamint az is, hogy K csak 3 számból volt felépítve. Bár az átalakítással jelentős munkát végeztünk, ez a kapott egyszerű alaknak esetleg sokszori alkalmazása során megtérül.

Pollai Marion (Bp. V., Veres Pálné lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kifejezés így is írható

$$K=\frac{a\,(b-c)^2+b\,(c-a)^2+c\,(a-b)^2}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)},$$

ebből az alakból 17 művelettel kapjuk K értékét.

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. I. o. t.)

2. Sok dolgozat 53 műveletet mutat ki az eredeti alakból való számításban, nem véve figyelembe a többször előforduló kifejezéseket.

3. Számos dolgozatot a $0/0=0$ állítás miatt nem fogadhattunk el. Ennek helytelenségére már az is figyelmeztethetett volna, hogy K átalakított formájának a második értékhármasra is van értelme, és a 0-tól különböző $37/72$ értéket adja.