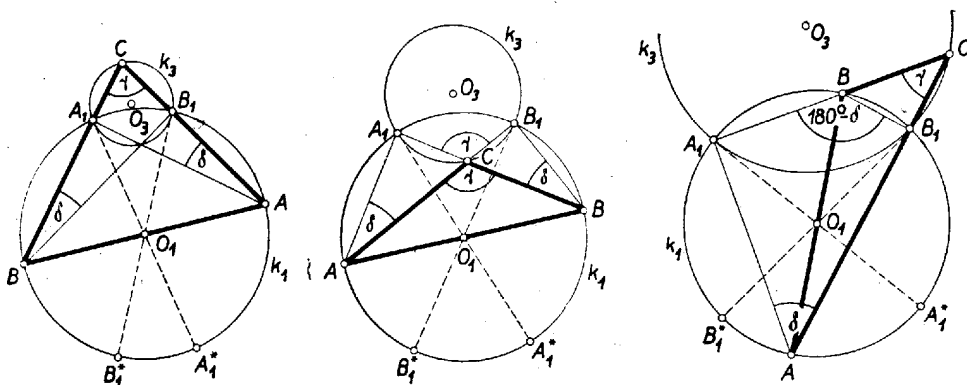


Megoldás: Legyen ABC egy az előírásoknak megfelelő háromszög; az adott talppontok legyenek az $a = BC$ és $b = CA$ -ra merőleges magasságok A_1 , ill. B_1 talppontjai, továbbá legyen adott az AA_1 magasság és a CA oldal közti CAA_1 szög, jelöljük ezt δ -val. Feltehetjük, hogy A_1 és B_1 különbözők, δ egy 0° -tól különböző hegyes szög, és $ABC < \neq 90^\circ$; egyrészt ugyanis a három kizárt feltétel bármelyikéből következik, hogy a másik kettő is teljesül, és akkor minden olyan derékszögű háromszög megfelel a követelményeknek, melynek derékszögű csúcsa az adott $A_1 \equiv B_1 \equiv C$ pont, másrészt egy háremszögben egy magasság az ezzel közös csúcsból induló oldalakkal hegyesszöget zár be, tehát $\delta < 90^\circ$ kell hogy legyen.

Az A_1, B_1 talppontok az AB oldal fölé írt Thales-körön vannak, mégpedig az AB egyenes egy oldalán vagy ellenkező oldalán, aszerint, amint az ABC háromszögben sem A -nál, sem B -nél nincs tompaszög, vagy az egyik szög tompa. Az első esetben az A_1B_1 szakasz A -ból is, B -ből is δ szög alatt látszik, a második esetben a két csúcs egyikéből δ , a másikéből $180^\circ - \delta$ szög alatt. (Ha pl. A egybeesik B_1 -gyel, akkor az egyik látószög nem létezik.) Mivel A_1B_1 és δ adott, ezek meghatározzák a kör sugarát. A és B számára két ilyen k_1 és k_2 kör felel meg, amelyek egymás tükörképei az A_1B_1 egyenesre; a rajzokon csak az egyiket tüntettük fel. Nem kapunk azonban valódi háremszöget, ha A egybeesik A_1 -gyel, és így B az ezzel átellenes A_1^* pontba kerül, vagy ha B esik B_1 -be, tehát ha A az ezzel átellenes B_1^* -gal esik egybe.



Ha most már felvesszük A -t tetszés szerint, csak A_1 -től és B_1^* -től különbözőnek k_1 -en, ez egyértelműen meghatározza a háromszöget: B a k_1 kör A -val átellenes pontja, C pedig az AB_1 és BA_1 egyenesek metszéspontja, ha $A \neq A_1^*$. Ha $A \equiv A_1^*$, tehát $B \equiv A_1$, akkor a BC oldalegyenest mint az $AA_1 \equiv AB$ magasságra az $A_1 \equiv B$ pontban merőleges egyenest kapjuk meg.

Ha a C metszéspont a k_1 körön kívül van, akkor A_1 a $\gamma = ACB$ szögnek CB szárára (a CB szakaszra vagy B -n túli meghosszabbítására) esik, és így γ az AA_1C derékszögű háromszög hegyesszöge, amiből $\gamma = 90^\circ - \delta$. Ha viszont C a k_1 körbe esik, akkor A_1 a CB szár C -n túli meghosszabbítására esik. Így γ az AA_1C háromszög külső szöge, tehát $\gamma = 90^\circ + \delta$. Ezek szerint C olyan, A_1 -en és B_1 -en átmenő körön van, amelynek a pontjaiból az A_1B_1 szakasz $90^\circ - \delta$, vagy $90^\circ + \delta$ szögben látszik.

Ilyen kör kettő van, k_3 és k_4 , egymásnak tükörképei az A_1B_1 -re. Megmutatjuk, hogy ha A -t a k_1 -en választjuk, akkor C azon a k_3 -on van, amelynek O_3 középpontja A_1B_1 -nek ellenkező oldalán van, mint a k_1 kör O_1 középpontja. – Ha C a k_1 körbe esik, akkor, mint láttuk, $\gamma = 90^\circ + \delta$, tompa szög, így α és β hegyes szögek, A és B az A_1B_1 -nek egy oldalán vannak, és ugyanezen az oldalon van O_1 is, mint az AB szakasz felezőpontja. Az ABB_1A_1 konvex négyszög átlóinak metszéspontjaként C is ugyanezen oldalon van A_1B_1 -nek, ennél fogva az A_1, B_1, C -vel meghatározott k_1 körnek az A_1CB_1 szög szárai közé eső íve az ellenkező oldalon van. Ehhez az ívhez O' középpontjában $2(90^\circ + \delta) > 180^\circ$ -os szög tartozik, ezért O' ugyancsak a C -vel ellentétes oldalon van, így O' , ill. k' valóban azonos O_3 , ill. k_3 -mal.

Ha C a k_1 -en kívül van, akkor egyszersmind A_1B_1 -nek O_1 -gyel ellenkező oldalán van. Ugyanis ilyenkor $\gamma = 90^\circ - \delta$, hegyesszög. Ha α és β is hegyesszögek, akkor A és B ismét O_1 oldalán vannak, hegyesszögű háromszögben pedig A_1 és B_1 elválasztják C -t B , ill. A -tól. Ha pedig pl. β tompaszög, akkor B a k_1 -nek rövidebb A_1B_1 ívén van, az A_1B_1 egyenesnek O_1 -gyel ellenkező oldalán, mert $A_1BB_1 < = 180^\circ - \delta > 90^\circ$, C pedig az A_1B szakasz B -n túli meghosszabbításán. – Ezek szerint k' -nek az A_1CB_1 szög szárai közé eső, $2(90^\circ - \delta) < 180^\circ$ -os középponti szöghöz tartozó íve az O_1 oldalán van, ezért O' ismét az ellenkező oldalon van.

C a k_3 -nak bármely az A_1 és B_1 -től különböző pontja lehet, ugyanis így A_1 és B_1 -gyel együtt szintén egyértelműen meghatározza a háromszöget: A a $CB_1 = b$ egyenes és $CA_1 = a$ -ra az A_1 -ben merőleges egyenes metszéspontja, és hasonlóan kapható B is. Viszont pl. $C \equiv A_1$ feltevése a kizárt $ACB < = 90^\circ$ esetre vezet.

Eredményünk így is kimondható: ha egyenesszakasszá elfajult háromszöget nem fogadunk el, akkor A és B egyik mértani helye a k_1 kör az A_1 és B_1^* , ill. B_1 és A_1^* pontok kivételével, és C mértani helye k_3 az A_1 és B_1 pontok kivételével; k_1 és k_3 helyére k_2, k_4 -et írva megállapításunk a másik mértani hely-párt adja, a „csillagos” pontokat természetesen azokon véve.

Megjegyzések. 1. Akik ismerik a háromszög Feuerbach-körének alaptulajdonságait, azok számára nyilvánvaló, hogy O_3 felezi a háromszög C -ből kiinduló magasságának C és az M magasságpont közti szakaszát, ennél fogva O_3C az A -nak bármely helyzetében merőleges AB -re. Ha tehát A (és vele B) a k_1 -en egyenletesen forog, akkor ugyanez áll C -re is a k_3 -on, és mindhárom csúcs egyszerre érkezik a kizárt pontokba.

2. A legtöbb dolgozat csak azt állapította meg, hogy A és B egy olyan köríven vannak, amelynek pontjaiból A_1B_1 látószöge δ , de nem vették észre, hogy A és B e körnek mindig átellenes pontjai, továbbá, hogy az ABC háromszög tompaszögű is lehet.