

Előzetes megjegyzés: Az egyenlőség mindkét oldalát az a, b, M, N és x számokból a négy alpművelettel számítjuk (racionális kifejezések). Ezek közül az osztás az egyetlen olyan, amely körültekintést igényel atekintetben, hogy végrehajtható-e, és pedig hogy nem 0-val kívánunk osztani. Így egyenlőségünknek akkor és csak akkor van értelme, ha $x - a, x - b$ és $a - b$ egyike sem 0, azaz $x \neq a$, $x \neq b$ és $a \neq b$. (Ennek kimondását a II. osztályos megoldók elmulasztották, az elsősök pedig akkor még nem is tudtak róla.) Egyébként a szokásnak megfelelően a, b, M, N -et tetszés szerinti állandóknak, x -et változónak tekintjük.

I. megoldás: Hozzuk közös nevezőre a jobb oldali törteket, rendezzük x szerint a számlálót és végezzük el benne a lehetséges kiemeléseket:

$$\begin{aligned} \frac{Ma + N}{a - b} \cdot \frac{1}{x - a} - \frac{Mb + N}{a - b} \cdot \frac{1}{x - b} &= \frac{(Ma + N)(x - b) - (Mb + N)(x - a)}{(a - b)(x - a)(x - b)} = \\ &= \frac{(Ma - Mb)x + (-Nb + Na)}{(a - b)(x - a)(x - b)} = \frac{M(a - b)x + N(a - b)}{(a - b)(x - a)(x - b)} = \\ &= \frac{(a - b)(Mx + N)}{(a - b)(x - a)(x - b)}. \end{aligned}$$

A legutóbbi alak $(a - b)$ -vel egyszerűsítve éppen a bal oldal, tehát az egyenlőség valóban azonosság a benne előforduló betűknek mindazon értékeire, amelyekre a kifejezések értelmezve vannak.

Gyuris Éva (Gyöngyös, Vak Bottyán g. I. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítandó azonosság módot ad arra, hogy a bal oldalon álló, másodfokú nevezőjű racionális kifejezést (függvényt) két egyszerűbb, elsőfokú nevezőjű racionális tört összegeként írassuk. Ennek megfelelően kérdésünket úgy is felvethetjük, mintha csak a bal oldali kifejezést ismernők, továbbá azt, hogy milyen alakú felbontást keresünk: mely A és B együtthatók mellett lesz az

$$(1) \quad \frac{Mx + N}{(x - a)(x - b)} = A \cdot \frac{1}{x - a} + B \cdot \frac{1}{x - b}$$

egyenlőség azonosság (természetesen $x = a$, $x = b$, valamint $a = b$ kivételével)?

A törtek eltávolításával és x szerinti rendezéssel

$$(2) \quad Mx + N = (A + B)x - (bA + aB).$$

Ez akkor és csak akkor azonosság, ha x együtthatója és az x -mentes tag a két oldalon megegyezik:

$$A + B = M$$

és

$$(3) \quad -(bA + aB) = N.$$

Ez a követelés az A és B ismeretlenekre egyenletrendszer ad, megoldása:

$$A = \frac{Ma + N}{a - b}, \quad B = -\frac{Mb + N}{a - b}.$$

Ezek megegyeznek az adott együtthatókkal, tehát az egyenlőségünk valóban azonosság.

Tomcsányi Gyula (Bp. I., Toldy F. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A és B úgy is meghatározhatók, hogy két határozott x helyre írjuk fel azt a követelést, hogy (2)-nek két oldala egyenlő legyen. Célszerűek erre az $x = a$ és $x = b$ helyek, ezekkel ugyanis (2)-nek rendezés előtti

$$(4) \quad Mx + N = A(x - b) + B(x - a)$$

alakjából előre látni, hogy az előbbi egyenletrendszer helyett két egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$Ma + N = A(a - b)$$

és

$$Mb - N = B(b - a)$$

és ezekből A és B meghatározása még egyszerűbb.

Török László (Ózd, József A. g. II. o. t.)

2. Vegyük észre, hogy itt x -nek éppen azt a két helyet választottuk, amelyre (1) nincs értelmezve, amelyet előre kizártunk. Meg kell ezért gondolnunk, hogy helyes volt-e eljárásunk. Helyes volt, mert (1)-gyel együtt (4)-re is áll követelésünk, hogy ti. $x = a$ és $x = b$ kivételével minden helyen álljon. Ez végtelen sok helyet jelent, ami több, mint kettő. Ha pedig a (4)-nek két oldalán álló elsőfokú polinomok legalább két helyen egyenlő értéket vesznek fel, akkor azonosak, mindenhol egyenlők, így az előbb kizárt a és b helyeken is, értelmezési tartományukba ugyanis kivétel nélkül minden szám beletartozik.

3. A és B -re felírt egyenletrendszerünk (3) egyenlete is tekinthető az 1. megjegyzésbeli meggondolás példájának, ez az $x = 0$ helyre követeli (2), ill. (4) két oldalának egyenlőségét.