

A törtek eltávolítása, vagyis mindnégy nevezővel való szorzás révén egyenletünkben az

$$(1) \quad (a + b + c)x^2 + 2(ab + ac + bc)x + 3abc = 0$$

legfeljebb másodfokú egyenlethez jutunk. A szorzás révén gyök nem vesztett el, így eredeti egyenletünknek más gyöke nem lehet, mint (1)-nek (fordítva azonban lehetséges, hogy (1)-nek valamelyik, esetleg mindkét gyöke – ha van – az adott egyenletnek nem gyöke), ennél fogva elegendő azt megmutatni, hogy (1)-nek minden gyöke valós.

Ez tulajdonképpen csak akkor kérdés, ha (1) valóban másodfokú, vagyis $a + b + c \neq 0$, ugyanis az ellentétes esetben valós együtthatós, legfeljebb elsőfokú egyenlettel állunk szemben, ilyenben nem valós gyökről nem lehet szó. Az $a + b + c \neq 0$ esetre a diszkriminánst az alábbiak szerint alakítva

$$\begin{aligned} 4(ab + ac + bc)^2 - 12abc(a + b + c) &= 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab) = \\ &= 2[(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (b^2c^2 - 2b^2ca + a^2b^2) + (a^2c^2 - 2c^2ab + b^2c^2)] = \\ &= 2[a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2], \end{aligned}$$

látjuk, hogy mint négyzetek összegének $2 > 0$ -val való szorzata, nem lehet negatív, ennél fogva valóban sem (1)-nek, sem az adott egyenletnek nem lehet nem valós gyöke, másképpen: ha van egyáltalán gyöke, akkor csak valós gyöke lehet.

Horváth Dénes (Kisújszállás, Móricz Zs. g. I. o. t.)