

Egyenleteink a (3) kivételével x, y, z, u -ban szimmetrikusok, vagyis bennük mindegyik ismeretlen ugyanolyan szerepet játszik: (1)-ben mindegyik az 1-szeresével, (2)-ben mindegyik a négyzetének 1-szeresével szerepel tagként ugyanazon az oldalon, (4)-ben mindegyik az első hatványával tényezőként ugyanazon tagban. A (3)-ban viszont minden tag két különböző ismeretlen szorzata, de a lehetséges ilyen szorzatok közül xz és yu hiányzik, ez az egyenlet az x, z és y, u párokban szimmetrikus. Ezeknek az észrevételeknek a kihasználásával rendszerünk megoldását több szakaszra bonthatjuk.

(3)-ból és (1)-ből alkalmas zárójelbefoglalással:

$$\begin{aligned} (3a) \quad & (x+z)(y+u) = 16, \\ (1a) \quad & (x+z) + (y+u) = 8. \end{aligned}$$

Ez az $x+z = \alpha$ és $y+u = \beta$ ismeretlenekre vonatkozóan a legegyszerűbb típusú másodfokú egyenletrendszer (adva van a szorzatuk és az összegük), így értékük a $\xi^2 - 8\xi + 16 = (\xi - 4)^2 = 0$ egyenletből (ahol ξ akár α -t, akár β -t jelentheti) egyetlen megoldásként $\alpha = \beta = 4$.

Másrészt (1) négyzetreemelésével a bal oldalon (2)-nek és (3) kétszeresének majdnem minden tagját megkapjuk, ugyanis

$$(5) \quad (x+y+z+u)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + u^2) + 2[(xy + xu + zy + zu) + (xz + yu)],$$

innen az $xz = \gamma$ és $yu = \delta$ ismeretlenek összegére kapunk egyenletet, amelyeknek ismét ismerjük a szorzatát is (4)-ből. Az (1)–(3) figyelembevételével (5)-ből

$$(5a) \quad 64 = 20 + 32 + 2(xz + yu),$$

ennélfogva a

$$\begin{aligned} (5b) \quad & \gamma + \delta = 6 \quad \text{és} \\ (4a) \quad & \gamma\delta = 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből az $\eta^2 - 6\eta + 9 = (\eta - 3)^2 = 0$ egyenlet egyetlen megoldásként $\gamma = \delta = 3$.

Így megkaptuk mind az x, z , mind az y, u ismeretlenpárra vonatkozóan mind összegüket, mind szorzatukat, ezek harmadszor is „összeg és szorzat” típusú rendszert alkotnak. Sőt, mivel $\alpha = \beta$ és $\gamma = \delta$, azért a két egyenletrendszer egymástól csak az ismeretlenek jelölésében különbözik, x és z ugyanazon másodfokú egyenlet gyökei, mint y és u , éspedig a $\zeta^2 - \alpha\zeta + \gamma = 0$ vagyis a $\zeta^2 - 4\zeta + 3 = 0$ egyenleté.

A megoldások:

$$\begin{aligned} (A_1) : x_1 = 1 \quad \text{és} \quad z_1 = 3, \quad & (A_2) : x_2 = 3 \quad \text{és} \quad z_2 = 1; \\ (B_1) : y_1 = 1 \quad \text{és} \quad u_1 = 3, \quad & (B_2) : y_2 = 3 \quad \text{és} \quad u_2 = 1. \end{aligned}$$

Most már a teljes egyenletrendszer összes megoldásait úgy kapjuk, hogy A_1 és A_2 -ből, valamint B_1 és B_2 -ből mind a $2 \cdot 2 = 4$ lehetséges párt felírjuk (l. a táblázatot).

	x	z	y	u
I.	1	3	1	3
II.	1	3	3	1
III.	3	1	1	3
IV.	3	1	3	1

Muszély György (Bp. VIII., Vörösmarty M. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha feltesszük, hogy a gyökök egész számok, akkor egyenletrendszerünknek fenti megoldásait az alábbi megfontolásokkal is megkereshetjük. (2) folytán abszolút értékben egyik ismeretlen értéke sem lehet 4-nél nagyobb. (4) folytán egyik sem lehet páros (0 sem), továbbá kettőnek abszolút értéke 3, kettőé 1. Egyik sem lehet negatív, mert (4) folytán a negatívok száma csak páros lehet, de (1) folytán mind a négynek negatív volta nem jöhet szóba, és kettő sem lehet negatív, mert akkor előbbi megállapításunk szerint (1) bal oldala maximálisan (a két abszolút értékben 3-mal egyenlő ismeretlent pozitívnak, az abszolút értékben 1-gyel egyenlőket negatívnak véve) $3+3-1-1=4$ lenne. Eszerint az ismeretlenek értékei csak 1, 1, 3, 3 lehetnek valamely sorrendben, ezek (2)-nek is megfelelnek. E számoknak az x, y, z, u szerepre való elrendezése (3) alapján végezhető el. Hatféle lehetséges sorrendjük közül 1, 3, 1, 3 és 3, 1, 3, 1 (vigyázzunk a betűsorrendre!) nem felel meg.

Marót Ildikó (Bp. V., Veres Pálné lg. II. o. t.)

2. A fenti „keresés” természetesen nem tekinthető teljes értékű megoldásnak, egyrészt mert abból a gyakran hallható, de hibás felfogásból indul ki, hogy számokon csak a legjobban ismert számokat, a természetes számokat értjük (e tekintetben az sem számít, hogy (1)–(4) jobb oldalán egész számok állnak), másrészt a próbálkozás, még ha rendszeres is, nem mindig biztosít az összes gyökrendszerek előállításáról, mindig egy alkalomra szabott, nem általános érvényű.

A közölt megoldásban is van bizonyos fogás jellegű elem, a szimmetriák felismerése, ez azonban az ismeretleneknek egymás közti kapcsolatára vonatkozik, nem pedig az ismert számok pozitív egész voltára. A közölt módszerrel a 8, 20, 16, 9 számok helyén más, nem egész számokkal, sőt a , b , c , d -vel is meg tudnók oldani a rendszert, akkor persze ξ és η -ra vonatkozó egyenleteknek két-két gyökével kellene tovább haladnunk.