

A feltevésben szereplő egyenlő értékű kifejezéseknek csak akkor van értelmük, ha a, x, y, z az 1-től különböző pozitív számok; ezt feltesszük. Megmutatjuk továbbá, hogy közös értékük nem lehet 0; ez ugyanis csak a számlálók háromtagú miatt lenne lehetséges, márpedig az $y+z-x = x+z-y = x+y-z = 0$ egyenletrendszerből egyértelműen a kizárt $x = y = z = 0$ esetre jutnánk.

Most már a feltevés első két tagjának egyenlőségéből átrendezéssel:

$$(1) \quad x \frac{{}^a \log y}{{}^a \log x} = x \cdot {}^x \log y = {}^x \log y^x = \frac{y(x+z-y)}{y+z-x}.$$

Az adott egyenlő kifejezések egymásba mennek át, ha y és z -t felcseréljük, x -et változatlanul hagyjuk. Ez a belőlük folyó (1)-ra is érvényes, ennél fogva

$$(2) \quad {}^x \log z^x = \frac{z(x+y-z)}{y+z-x}.$$

(1) és (2) különbségét képezve a kapott logaritmus-egyenlőségéből a megfelelő hatványok egyenlőségére következtethetünk:

$$\begin{aligned} {}^x \log y^x - {}^x \log z^x &= {}^x \log \frac{y^x}{z^x} = \frac{y(x+z-y) - z(x+y-z)}{y+z-x} = z-y, \\ \frac{y^x}{z^x} &= x^{z-y} = \frac{x^z}{x^y}, \end{aligned}$$

és innen

$$x^y y^x = x^z z^x.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $y^z z^y$ értéke ugyanennyi.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. I. o. t.)

Megjegyzés: A feladat egy más megoldásának vázlata található a Matem. Szakköri Feladatgyűjtemény c. középiskolai szakköri füzetben.¹

¹2. kiadás (Tankönyvkiadó, 1955.) 102. fd. 76. o.