

Mondjuk ki mindenekelőtt, hogy egyenletrendszerünk megoldásaiban egyik ismeretlen értéke sem lehet negatív, hiszen x , y és z mindegyike két nemnegatív négyzetgyök összege, továbbá, hogy a , b , c -ről az általánosság csorbitása nélkül feltehetjük, hogy pozitívok, hiszen a rendszerben csak négyzetük lép fel. Vegyük észre, hogy (2) és (3) úgy adódnak (1), ill. (2)-ből, hogy x , y , z helyére y , z , x -et írunk, egyszersmind a , ill. b helyére b , ill. c -t.

(1)-ben az első gyökös kifejezést a bal oldalra átvive és mind a két oldalt négyzetre emelve az egyenletben csak egy gyökös kifejezés szerepel:

$$x^2 - 2x\sqrt{y^2 - a^2} + y^2 = z^2.$$

Innen a gyökös tag újbóli különválasztásával, újabb négyzetreemeléssel gyökmentes egyenletet nyerünk, amelyből rendezéssel:

$$(4) \quad \begin{aligned} (x^2 + y^2 - z^2)^2 &= 4x^2(y^2 - a^2), \\ 4a^2x^2 &= 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = U. \end{aligned}$$

x , y , z helyére y , z , x -et írva a jobb oldali U kifejezés önmagába megy át, ennél fogva a (2) és (3)-ból hasonló eljárással képezhető egyenletek röviden így írhatók:

$$(5) \quad 4b^2y^2 = U,$$

$$(6) \quad 4c^2z^2 = U.$$

Ezek szerint (4), (5) és (6) bal oldalai is egyenlők; az ebből adódó

$$(7) \quad y^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2 \quad \text{és}$$

$$(8) \quad z^2 = \frac{a^2}{c^2}x^2$$

kifejezéseket (4)-be helyettesítve egyismeretlenes, csak x^2 -es és x^4 -es tagot tartalmazó egyenletet kapunk, végül abból $a^4 \neq 0$ -val való osztással és kiemeléssel:

$$(9) \quad x^2 \left[\left(\frac{2}{a^2b^2} + \frac{2}{b^2c^2} + \frac{2}{c^2a^2} - \frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4} \right) x^2 - \frac{4}{a^2} \right] = 0.$$

Négyzetreemelésünkkel mindig következményére, de nem ekvivalens következményére tértünk át az éppen előttünk volt egyenletnek; így eredeti egyenletrendszerünk bármely megoldásában x csak a (9)-et kielégítő érték lehet, viszont (9) gyökei nem feltétlenül tartoznak bele, rendszerünk valamely megoldásába.

Mindjárt a kétszeres $x = 0$ gyökét is el kell vetnünk (9)-nek, mert ebből (7) és (8) folytán $y = z = 0$, így pedig (1)–(3) gyökjelei alatt negatív számok állnak. (9)-nek szögletes zárójelben levő tényezőjéből is csak a pozitív gyököt vehetjük figyelembe, így a negyedfokú egyenletnek számunkra legfeljebb egy gyöke jöhet szóba:

$$x = \frac{2}{\left(\frac{2}{a^2b^2} + \frac{2}{b^2c^2} + \frac{2}{c^2a^2} - \frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4} \right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{a}.$$

Az első nevezőbeli kifejezést $\frac{1}{T}$ -vel jelölve (7) és (8) alapján, vagy az eddighez hasonló önálló eljárással azt kapjuk, hogy rendszerünk megoldása csak a következő lehet:

$$(10) \quad x = \frac{2T}{a}, \quad y = \frac{2T}{b}, \quad z = \frac{2T}{c}.$$

A valós számokban való megoldhatóságnak szükséges feltétele, hogy az $1/2$ kitevőjű hatvány alapja pozitív legyen:

$$(11) \quad \frac{1}{T^2} = \frac{2}{a^2b^2} + \frac{2}{b^2c^2} + \frac{2}{c^2a^2} - \frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4} > 0;$$

ha ez teljesül, akkor x , y , z mindegyikére egyetlen pozitív értéket kapunk. Hogy ezek az eredeti rendszert kielégítik-e, ennek behelyettesítéssel való ellenőrzése bonyolult számítás lenne.

Ezt megkerülhetjük avval, hogy feladatunknak geometriai jelentést tulajdonítunk, egyenleteink valamennyi tagját egy-egy szakasznak tekintjük. Tegyük fel, hogy a (10) számhármass megoldása rendszerünknek. Ekkor (1)-nek két, a Pythagoras-tételre emlékeztető gyökös kifejezése annak a két derékszögű háromszögnek „második” befogóját jelenti, amelyek mindegyikének „első” befogója az ismert a szakasz, átfogóik pedig az y , ill. z ismeretlenek. Mármint x , mint a második befogók összege, úgy kaphat jelentést, ha a két háromszöget a befogóikkal úgy toljuk össze, hogy a második befogók egymás meghosszabbításába essenek, és pedig ekkor x a két derékszögű háromszög által lefedett egyetlen háromszögnek „harmadik” oldala (az első kettő y és z), a pedig az x alaphoz tartozó magassága. Ebben a

háromszögben az x oldal két végpontjában a két derékszögű háromszögnek egy-egy hegyes szöge fekszik, vagy pedig egyik végpontjában derékszöge, ha ti. $y = a$ vagy $z = a$, amikor a megfelelő derékszögű háromszög egyenesszakasszá fajul el; mindkét derékszögű háromszög azonban nem fajulhat el, mert különben a már kizárt $x = y = z = 0$ esetre jutnánk. – Ugyancsak az x, y, z oldalakkal képezett háromszögre vezetnek (2) és (3) is azzal a további megállapítással, hogy az y , ill. z oldalhoz tartozó magasság b , ill. c . Ezek szerint x, y, z csak annak a nem tompaszögű háromszögnek az oldal-mértékszámái lehetnek, amelyben a magasságszakaszok hossza a, b, c .

Hogy létezik-e ez a háromszög, és ha igen, akkor nem tompaszögű-e, erre a kérdésre a t terület legrégebben ismert képleteinek felhasználásával válaszolhatunk, amelyben az oldalak és a megfelelő magasságok együtt szerepelnek. Minthogy

$$2t = xa = yb = zc,$$

azért

$$(12) \quad x = 2t \cdot \frac{1}{a}, \quad y = 2t \cdot \frac{1}{b}, \quad z = 2t \cdot \frac{1}{c},$$

vagyis az x, y, z oldal-mértékszámok *arányosak* a megfelelő magasságok reciprok értékével, ennél fogva az x, y, z oldalakkal meghatározott háromszög *hasonló* ahhoz, amelyet az $1/a, 1/b, 1/c$ hosszúságú szakaszok határoznak meg, így pedig a kérdéses (az előbbi) háromszög akkor és csak akkor létezik, ill. akkor és csak akkor nem tompaszögű, amikor az utóbbi.

Hogy a magasság-mértékszámok reciprok értékével mint szakaszokkal lehessen háromszöget szerkeszteni, ehhez szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek a „háromszög-egyenlőtlenségek”:

$$(13) \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b};$$

ahhoz pedig, hogy ez a háromszög ne legyen tompaszögű, szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek azok az egyenlőtlenségek, amelyek a koszinusz-tétel révén biztosítják a szögek koszinuszának, ill. a $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ kifejezések számlálójának nemnegatív voltát:

$$(14) \quad \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Ámde – pozitív a, b, c esetén – a (14) egyenlőtlenségek teljesülése esetén a megfelelő (13) alatti is teljesül; ugyanis pl.

$$\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{2}{bc} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2,$$

és ebből

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

eszerint mondhatjuk, hogy rendszerünk megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételét a (14) egyenlőtlenségek fejezik ki.

Megjegyzések. A (10) és (12) kifejezések összehasonlításából adódik, hogy $T = t$, eszerint egy háromszög területe a magasságokból a (11) képlettel számítható. Több dolgozat is felhasználta azt a szerkezeti hasonlóságot, amely T és a Heron-képletnek a kizárólag az oldalakat tartalmazó

$$16t^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

alakja között fennáll (itt a, b, c , szokás szerint, az oldalakat jelenti). Így – mint többen megállapították – a (11) követelést azt fejezi ki, hogy $1/a, 1/b, 1/c$ -ből mint oldalakból lehessen háromszöget szerkeszteni. Ez azonban a megoldhatóságnak csupán szükséges, de nem elegendő feltétele. A dolgozatok figyelmen kívül hagyták, hogy a négyzetgyökös kifejezések értéke nem lehet negatív, nem vizsgálták a háromszög „tompaszögmentességének” feltételét.