

Hogy egyenletünknek legyenek *határozott* gyökei, fel kell tennünk, hogy $p \neq 0$; különben ugyanis a $0x^2 + 0x + 0 = 0$ azonossággal állnánk szemben – amelyet minden szám kielégít –, és így kérdésünknek nem volna értelme. Másrészt, hogy a gyökök *valósak* legyenek, fel kell tennünk, hogy a p -vel egyszerűsített

$$(1) \quad x^2 + (p+1)x - (3p-2) = 0$$

egyenlet diszkriminánsa nem negatív:

$$(2) \quad 0 \leq (p+1)^2 + 4(3p-2) = p^2 + 14p - 7 = (p+7)^2 - 56,$$

azaz, hogy vagy

$$(2a) \quad p \leq -7 - \sqrt{56} \approx -14,48 \quad \text{vagy} \quad p \geq -7 + \sqrt{56} \approx 0,48.$$

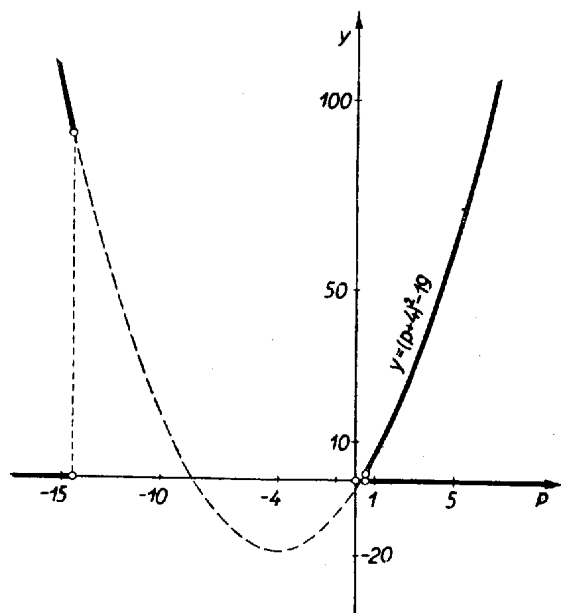
A gyökök vizsgálandó y négyzetösszege kifejezhető összegükkel és szorzatukkal, ill. az (1)-beli együtthatók révén p -vel:

$$(3) \quad \begin{aligned} y = x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (p+1)^2 + 2(3p-2) = \\ &= p^2 + 8p - 3 = (p+4)^2 - 19. \end{aligned}$$

ennélfogva y -nak mint p függvényének minimumát kell keresnünk a (2a)-val meghatározott értelmezési tartományon.

(2a)-t nem tekintve y legkisebb értéke $p = -4$ mellett -19 , amikor ti. (3)-ban $(p+4)^2$ értéke a legkisebb, azaz 0. Azonban $p = -4$ -et (2a) kizárja, és valóban az $y = -19$ érték is lehetetlen, hiszen négyzetek összege nem lehet negatív.

Hogy y értelmezési tartományának korlátozottságát figyelembe vehessük, tekintsük (3) grafikonját, töröljük belőle a (2a) révén kizárt ívet és a visszamaradt grafikonon keressük meg a „legalacsonyabb” pontot.



A teljes grafikon parabola, a $(-4, -19)$ pontbeli csúcsig süllyedő és onnan emelkedő ágakkal. Láttuk már, hogy a csúcs beleesik a törlendő ívbe, és mivel az értelmezési tartomány (2a)-ban megállapított végpontjai különbözőnek $p = -4$ -től, azért mindkét ág „aljáról” törölünk egy-egy részt. Ezek után a keresett legkisebb értéket a visszamaradó két rész-ág végpontjainak ordinátái közül már közvetlen összehasonlítással kiválaszthatjuk:

$$p = -7 \mp \sqrt{56} \text{ mellett } y = (-3 \mp \sqrt{56})^2 - 19 = 46 \pm 12\sqrt{14} \approx \begin{cases} 90, 90 \\ 1, 10, \end{cases}$$

eszerint a keresett legkisebb érték $y = 46 - 12\sqrt{14} \approx 1,10$ és ezt $p = -7 + 2\sqrt{14} \approx 0,48$ -nál veszi fel y . Ekkor a diszkrimináns 0, a gyökök: $x_1 = x_2 = -\frac{p+1}{2} = 3 - \sqrt{14} \approx -0,7417$ és $y = 2x_1^2 \approx 2 \cdot 0,550 = 1,100$.