

I. megoldás: Írjuk az adott A kifejezést n különbség összege helyett egyetlen különbségként:

$$A = n \cdot 10^n - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^2 + 10^1 + 10^0).$$

A kivonandó az az n -jegyű szám, amelynek minden jegye 1. Ez kisebb, mint 10^n , tehát ha levonjuk 10^n -ből, az adódó különbséget hozzá kell adni a kisebbítendőből még megmaradó $(n-1)10^n$ -hez, úgy kaphatjuk meg A -t. Le kell tehát vonnunk 10^n -ből, vagyis az egy 1-esből és utána n darab 0-ból álló számból az n darab 1-esből álló számot:

$\overbrace{10^n}^{n+1}$	$\overbrace{10^{n-1}}^n$	$\overbrace{10^{n-2}}^{n-1}$	$\overbrace{10^{n-3}}^{n-2}$	$\dots$	$\overbrace{10^2}^3$	$\overbrace{10^1}^2$	$\overbrace{10^0}^1$
1	0	0	0	$\dots$	0	0	0
	1	1	1	$\dots$	1	1	1

(A szaggatott vonal fölött az oszlopok jobbról számított sorszámát és a helyi értéket írtuk ki.)

Mármost – a kivonást a szokott módon végezve – a $10^0 = 1$ helyi értékű oszlopban 9 kell a kivonandó 1-nek a legközelebbi nagyobb, 0-ra végződő számig, a 10-ig való kipótlásához, vagyis különbségünkben és A -ban is az egyesek helyén valóban 9 áll; a $10^1, 10^2, \dots, 10^{n-1}$ helyi értékű oszlopok mindegyikébe a közvetlen utána álló oszlopból 1–1 „maradékot” viszünk át, így mindezekben $1+1=2$ -t kell 10-re kiegészítenünk, ehhez pedig valóban 8 egység szükséges, ilyen oszlop mind különbségünkben, mind A -ban $n-1$ számú van; végül kivonásunk 10^n helyi értékű oszlopa üres marad, mert az áthozott 1 maradéknak a kisebbítendőbeli 1-re való kipótlásához 0 egység kell, erre a helyre lép A -ban a kivonandóból megmaradt $n-1$ számú 10^n helyi értékű egység. Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Hajna János (Pécs, Széchenyi I. g. II. o. t.)

II. megoldás: Az adott n tagú összeg minden tagja pontosan n -jegyű, mert kisebb 10^n -nél, a legkisebb $n+1$ jegyű számnál, és nagyobb 10^{n-1} -nél, a legkisebb n -jegyűnél. Minthogy $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ esetén

$$10^n - 10^k = (10^{n-k} - 1)10^k = \overbrace{9}^1 \overbrace{9}^2 \dots \overbrace{9}^{n-k} \overbrace{0}^1 \overbrace{0}^2 \dots \overbrace{0}^k,$$

szóban: az egymás utáni tagok $1, 2, \dots, n-1, n$ számú 9-es jeggyel kezdődnek és ezek után $n-1, n-2, \dots, 1, 0$ számú 0 jegy áll. Eszerint az összeadandókat a szokott módon egymás alá írva a $10^{n-1}, 10^{n-2}, \dots, 10^1, 10^0$ helyi értékű oszlopban alulról fölfelé $n, n-1, \dots, 2, 1$ számú 9-es áll, a többi helyeken a 0 jegy. Ezen oszlopok jegyeinek összege rendre

$$9n, 9(n-1), \dots, 36, 27, 18, 9,$$

eszerint az összeadást a szokott módon végezve A -nak 10^0 és 10^1 helyi értékű jegye valóban 9, ill. 8, a 10^1 helyi értékű oszlop 1-es maradékával a 10^2 jegy $1+27=28$ -ból ugyancsak 8, az innen adódó 2 maradékkal a 10^3 jegy $2+36=38$ -ból ismét 8 és a maradék 3. Eddig minden oszlop átviendő maradéka ugyanannyi, mint a helyi értékben a 10-es alap kitevője. Általában is, feltéve, hogy a 10^{k-1} helyi értékű oszlop maradéka $k-1$, evvel együtt a 10^k oszlop összege

$$9(k+1) + k - 1 = 10k + 8,$$

és ebből 8 az A -nak 10^k értékű jegye és a 10^{k+1} helyi értékű oszlopba maradékként k számú 10-est viszünk át. Ha végül a $k+1$ -edik oszlop az első olyan, amelyben már nincsenek 9-esek, akkor $k+1=n$, így a $k=n-1$ -es maradékot A -nak a 10^k oszlopbeli 8-as jegye elé írjuk. Evvel bebizonyítottuk a feladat állítását.