Jelöljük az adott kifejezést z-vel. Mindenekelőtt azt kell biztosítanunk, hogy z-nek legyen értelme a valós számok körében.

Hogy az $\frac{1}{2}$ kitevős hatványoknak legyen értelmük, fel kell tennünk, hogy alapjuk nem negatív, azaz, hogy

a) a nevezőkben $y \geq 0$,

b) a számlálók második tagjában $x^2 - y \geq 0$,

továbbá meg kell vizsgálnunk, hogy e két követelmény mellett hogyan alakul a két hányados, ill. a két számláló és a közös nevező előjele.

A b) követelmény folytán $x^2 \geq y$, azaz

$$\text{vagy } b')\ x \geq y^{\frac{1}{2}} (\geq 0), \qquad \text{vagy } b'')\ x < -y^{\frac{1}{2}} (\leq 0).$$

Az egyenlőséget b'')-ben nem engedhetjük meg, mert különben a nevezők eltűnnének; hasonlóan b')-ben sem állhat mindkét $\geq$ jel helyén egyidejűleg egyenlőség.

Mármost b') esetén a nevezők és az első számláló pozitívok, mert van pozitív tagjuk és nincs negatív tagjuk, továbbá a második számláló nem negatív, mert

b) és a) folytán $x^2 - y \leq x^2$ és így $(x^2 - y)^{\frac{1}{2}} \leq x$;

b'') esetén a nevezők negatívok, a második számláló mindkét tagja negatív, és az első számláló nem pozitív, mert b'') és a) folytán $x^2 - y \leq x^2$, $(x^2 - y)^{\frac{1}{2}} \leq \leq |x| = -x$; ezek szerint mindkét alesetben mindkét hányados pozitív vagy 0, így további feltevések nélkül z mindkét tagjának van értelme.

Kimondhatjuk azt is, hogy csak az egyik hányados lehet 0, a b') esetben a második, b'')-ben az első, így z mindenképpen pozitív, ennélfogva egyenlő négyzetének (pozitív) négyzetgyökével. Eszerint pedig

$$z = (z^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x + (x^2 - y)^{\frac{1}{2}} + 2[x^2 - (x^2 - y)]^{\frac{1}{2}} + x - (x^2 - y)^{\frac{1}{2}}}{2(x + y^{\frac{1}{2}})} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2x + 2y^{\frac{1}{2}}}{2\left(x + y^{\frac{1}{2}}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1,$$

vagyis kifejezésünk értéke (a tett követelmények mellett) állandó. Ennél egyszerűbb alak nyilván nem lehetséges.

Krámli András (Szeged, Radnóti M. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A legtöbb dolgozat beküldője helytelenül ± 1-et adta meg a kifejezés legegyszerűbb alakjának. Pontveszteségük tanulságaként véssék ezek jól emlékezetükbe egyrészt, hogy $\frac{1}{2}$ kitevőjű hatványon a (nemnegatív) alapnak a nemnegatív négyzetgyökét értjük, másrészt, hogy megoldásunkat akkor írjuk (pl.) ± 1 alakban, ha *olyan* számot keresünk, amelynek négyzete 1. Figyeljük meg az előző mondatot nyelvi szempontból is, a pontos („szabatos") beszéd szempontjából. Az „a" határozott névelő használata azt fejezi ki, hogy (egyetlenegy) jól meghatározott valamiről – itt számról – van szó; míg az „olyan" melléknévi mutató névmás itt arra a mellékmondatra mutat rá, amelyben kifejezett tulajdonsága több számnak is meglehet, esetünkben $+1$ és -1 azok, amelyeknek megvan, és más számnak nincs meg. – Teljes értékűnek csak azokat a dolgozatokat fogadtuk el, amelyek ki is mondják, hogy -1 nem lehet a kifejezés értéke.