

A kívánt egyenlet felállításáról csak akkor lehet szó, ha y_1 és y_2 mindegyike szám, vagyis nevezőjük nem 0, más szóval ha x_1 és x_2 különbözik 1-től; feltesszük ezért, hogy $x = 1$ nem elégíti ki az adott egyenletet, azaz fennáll: $1 + p + q \neq 0$. A keresett egyenlet együtthatóit lényegében y_1 és y_2 összege illetőleg szorzata adja meg. Mivel a két gyök x_1 és x_2 felcserélésével egymásba megy át, remélhető, hogy ezek a kifejezések közvetlenül átalakíthatók $x_1 + x_2$ és $x_1 x_2$ kifejezésévé, és így felírhatók p és q -val a gyökképlet alkalmazása nélkül. (Egyébként a feladat – kimondatlanul – nyilván ezt kívánja.) A gyökök és együtthatók közti összefüggés szerint, ha a keresett egyenletet $ay^2 + by + c = 0$ alakban írjuk és felhasználjuk, hogy $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{c}{a} &= y_1 y_2 = \frac{x_1(1+x_1)x_2(1+x_2)}{(1-x_2)(1-x_1)} = \frac{x_1 x_2 [1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2]}{1 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = \frac{q(1-p+q)}{1+p+q}, \\ \frac{b}{a} &= -(y_1 + y_2) = -\frac{(x_1 + x_1^2)(1-x_1) + (x_2 + x_2^2)(1-x_2)}{(1-x_2)(1-x_1)} = \frac{x_1^3 + x_2^3 - (x_1 + x_2)}{1+p+q} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)}{1+p+q} = \frac{-p^3 + 3pq + p}{1+p+q} = \frac{p(1+3q-p^2)}{1+p+q}.\end{aligned}$$

tehát pl. $a = 1$ választással egy az előírásnak megfelelő egyenlet:

$$y^2 + \frac{p(1+3q-p^2)}{1+p+q}y + \frac{q(1-p+q)}{1+p+q} = 0,$$

vagy, $a = 1 + p + q$ választással (amivel $a \neq 0$, tehát az egyenlet valóban másodfokú):

$$(1) \quad (1+p+q)y^2 + p(1+3q-p^2)y + q(1-p+q) = 0.$$

Pl. $p = -1$, $q = -12$ -vel az adott egyenlet gyökei $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, az (1) egyenlet: $-12y^2 + 36y + 120 = 0$, ennek gyökei: $y_1 = -2$, $y_2 = 5$, és ezek, valamint x_1 és x_2 között valóban fennállanak az előírt összefüggések.

Kátai Szabolcs (Bp. I., Toldy F. g. I. o. t.)