

I. megoldás: Ha az n db egyenes mindegyike átmegy egy ponton, akkor nincs mit bizonyítanunk. Feltehetjük tehát, hogy nem mindegyik egyenes halad át egy ponton. – Tekintsünk az egyenesek közül két tetszőszerintit: a -t és b -t. Mivel az egyenesek nem mind mennek át a és b -nek P metszéspontján, azért van legalább egy olyan c egyenes, amely nem halad át P -n. Ennek az a -val és b -vel való közös pontjai P -tól különbözők, ez pedig azt jelenti, hogy c -nek két pontja van a és b síkjában, és így abban benne fekszik.

Bármelyik további d egyenes metszi a , b és c mindegyikét. Minthogy azonban e háromnak nincs közös pontja, azért d -vel alkotott metszéspontjaik közül legalább kettő különböző, így c -re vonatkozó fenti következtetésünk d -re is áll.

Simai László (Kisújszállás, Móricz Zs. g. I. o. t.)

II. megoldás: Ha az n db egyenes mindegyike egy síkban van, akkor nincs mit bizonyítanunk. Feltehetjük tehát, hogy nem mindegyik egyenes van benne egy síkban. Tekintsünk az egyenesek közül két tetszőszerintit: a -t és b -t. Mivel az egyenesek nem mind vannak benne a és b -nek S síkjában, azért van legalább egy olyan c egyenes, amely nincs benne S -ben, így nincs S -sel egynél több közös pontja. a -nak és b -nek viszont nincs S -en kívüli pontja, így c csak úgy metszheti a és b mindegyikét, ha áthalad közös pontjukon P -n. Bármelyik további d egyenes vagy S -ben van, és ekkor c -t csak P -ben metszheti, vagy nincs benne S -ben, ekkor ugyanaz áll rá, mint c -re.

Megjegyzések. c létezését kihasználva tulajdonképpen feltettük, hogy $n > 2$; emiatt az $n = 2$ esetről külön kell szólnunk. Ekkor azonban a bizonyítandó állítás csupán más kifejezésekkel való megismétléseit jelenti a feltevésnek, tehát igaz. Az pedig, hogy d -ről is beszéltünk, az $n > 3$ feltevést jelenti. Ha $n = 3$, akkor a bizonyítás a c -re vonatkozó megállapítással be van fejezve.

Természetesen az is lehetséges, hogy az egyenesek egy síkban is vannak és egyszersmind egy ponton mennek át. Eszerint a „vagy... vagy...”-nak itt nem az a jelentése, mint a közbeszédben rendszerint: két, esetleg több lehetőség közül pontosan az egyik teljesül, a többi nem (ún. „kizáró-vagy”). Itt a „vagy-vagy” azt jelenti, hogy a két lehetőség közül legalább az egyik teljesül.

Figyeljük meg a bizonyításokban, hogy a „mindegyik” fogalomnak a tagadása nem ez: „egy sem” (ahogyan sokan felületesen gondolnák), hanem ez: „nem mindegyik”. Az utóbbi tagadó alakot így fordítottuk át állítássá: „van legalább egy olyan, amely nem ...”