

I. megoldás: A kérdés eldöntése nyilván csak úgy lesz tanulságos, a gondolatok csak akkor lesznek más esetekben is használhatók, ha válaszunkat nem a két oldalnak külön-külön való kiszámításával készítjük elő.

Vonjuk le a jobboldalból a bal, a közös nevező 79^4 lesz, a számláló pedig így alakítható át (igyekezve szorzatokat alakítani és a közös tényezőket kiemelni):

$$\begin{aligned} & 79^2(40^2 + 51^2 + 91^2) - 40^4 - 51^4 - 91^4 = 41^2(79^2 - 40^2) + \\ & \quad + 51^2(79^2 - 51^2) - 91^2(92^2 - 79^2) = \\ & = 40^2 \cdot 119 \cdot 39 + 51^2 \cdot 130 \cdot 28 - 91^2 \cdot 170 \cdot 12 = 4^2 \cdot 10^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 13 + \\ & \quad + 3^2 \cdot 17^2 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 7 - 7^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 = \\ & = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 17(4 \cdot 10 + 3 \cdot 17 - 7 \cdot 13) = \\ & = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 17(40 + 51 - 91) = 0 \end{aligned}$$

Azt nyertük, hogy a két oldal különbsége 0, és így igazoltuk az egyenlőség helyességét.

Balogh Anikó (Bp., V., Veress Pálné lg. I. o. t.)

II. megoldás: Vegyük észre a kétoldali hatványalapok megegyezésén felül azt is, hogy $40 + 51 = 91$, és kérdezzük általában: mely feltétel mellett igaz az

$$(1) \quad \frac{a^4 + b^4 + (a + b)^4}{c^4} = \frac{a^2 + b^2 + (a + b)^2}{c^2},$$

egyenlőség?

(1)-ből a zárójelek felbontásával és felezéssel:

$$\frac{a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4}{c^4} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{c^2},$$

itt pedig a baloldali kifejezésben ráismerhetünk a jobboldalinak a négyzetére.

Az $x^2 = x$ egyenlőség viszont teljesül, ha $x = 1$, ennél fogva (1) igaz voltának elegendő feltétele, hogy álljon:

$$(2) \quad c^2 = a^2 + ab + b^2.$$

Ez a mi esetünkben teljesül, ugyanis $a = 40$, $b = 51$ és $c = 79$ -cel egyrészt

$$c^2 - a^2 = 79^2 - 40^2 = 39 \cdot 119 = 3 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 17,$$

másrészt

$$ab + b^2 = 40 \cdot 51 + 51^2 = 51 \cdot 91 = 3 \cdot 17 \cdot 7 \cdot 13,$$

ennél fogva az eredeti egyenlőség is igaz.

Bácsy Zsolt (Bp., V., Eötvös J. g. I. o. t.)

Megjegyzés. $x^2 = x$ akkor is teljesül, ha $x = 0$. Az $a^2 + ab + b^2 = 0$ követelményből azonban a és b hányadosa nem valós szám, így nem kapunk a feladatban bemutatotthoz hasonló tetszetős egyenlőséget. Egyébként a (2) egyenlőséget pl. a jóval kisebb $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ számok is kielégítik.