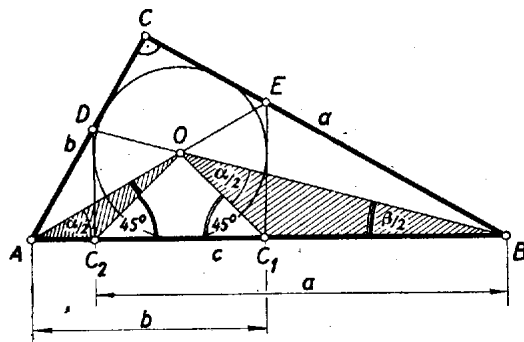


I. megoldás: Az ABC derékszögű háromszög A és B csúcsának szögfelezőire tükrözzük a derékszögű csúcsot (1. ábra), jelöljük az így kapott pontokat C_1 -gyel és C_2 -vel, a szögfelezők metszéspontjait a befogókkal D -vel és E -vel.



1. ábra

A tükrözés miatt DC_2 és EC_1 érintői lesznek az O középpontú beírt körnek s mivel mindkettő merőleges a c átfogóra, párhuzamos érintők lesznek. Így távolságuk

$$C_1 C_2 = 2\rho$$

(ρ jelöli a beírt kör sugarát).

Az OC_1C_2 derékszögű egyenlő szárú háromszög befogói Pythagoras-tétellel kiszámíthatók:

$$(1) \quad OC_1 = OC_2 = \rho\sqrt{2}.$$

A tükrözés következtében:

$$BC_2 = a \quad \text{és} \quad AC_1 = b,$$

ezért

$$(2) \quad AC_2 = c - a \quad \text{és} \quad BC_1 = c - b.$$

Az OC_1C_2 háromszög derékszögű és egyenlő szárú, C_1 -nél és C_2 -nél levő szögei 45° -osak. Az OAC_2 háromszögnek a C_2 -nél levő 45° -os szög külső szöge, az $\frac{\alpha}{2}$ szöget tehát a háromszög O -nál levő szöge 45° -ra egészíti ki; így ez a szög csak $\frac{\beta}{2}$ lehet (hiszen az eredeti derékszögű háromszögben $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$). Ugyanígy a BOC_1 háromszög O -nál levő szöge $\frac{\alpha}{2}$. A két háromszög tehát hasonló egymáshoz, megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$AC_2 : C_2O = OC_1 : C_1B.$$

Az aránypárba az (1) és (2) alatti értékeket beírva:

$$(c-a) : \varrho\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2} : (c-b),$$

azaz

$$2\rho^2 = (c-a)(c-b).$$

2-vel megszorozva mindkét oldalt:

$$(2\rho)^2 = 2(c-a)(c-b).$$

Ezzel épp a bizonyítandó tételt igazoltuk.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. I. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszög területe a beleírható kör sugarával és a félkerülettel kifejezhető:

$$t = \varrho s = \varrho \frac{a+b+c}{2}.$$

Derékszögű háromszög esetén:

$$t = \frac{ab}{2}.$$

A kettőt összevetve

$$2\varrho = \frac{2ab}{a+b+c}.$$

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

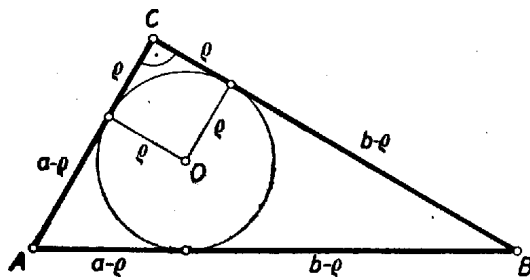
$$4\varrho^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}.$$

A Pythagoras-tétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned} 4\varrho^2 &= \frac{4(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)}{c^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} = \frac{4(c-b)(c+b)(c-a)(c+a)}{2[c(a+c) + b(a+c)]} = \\ &= \frac{2(c-b)(c+b)(c-a)(c+a)}{(c+b)(a+c)} = 2(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Tihanyi Ambrus (Bp., V., Apáczai Csere g. II. o. t.)

III. megoldás: Rajzoljuk meg az a, b, c oldalú derékszögű háromszögbe a ϱ sugarú beírható kört és rajta az érintési pontokat (2. ábra).



2. ábra

Egy pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlősége alapján könnyen látható, hogy a c átfogó a következő két szakasz összege:

$$c = (a - \varrho) + (b - \varrho).$$

Innen

$$2\varrho = a + b - c,$$

négyzetre emelve s a Pythagoras-tételt fölhasználva:

$$\begin{aligned} 4\varrho^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 2c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = \\ &= 2c(c - a) - 2b(c - a) = 2(c - a)(c - b). \end{aligned}$$

Állításunkat ezzel bizonyítottuk.

Németh Márta (Kazincbarcika, Vegyip. tech. I. o. t.)