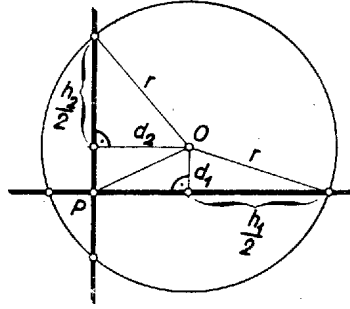


Az 1. ábrán megrajzoltunk az O középpontú körben egy P ponton átmenő két egymásra merőleges h_1, h_2 húrt.



1. ábra

Jelöljük a húroknak a középponttól mért merőleges távolságát d_1 -gyel és d_2 -vel, a kör sugarát r -rel. A d_1 és d_2 meghúzásával keletkező derékszögű háromszögekre a Pythagoras-tételt felírva:

$$\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = r^2 - d_1^2 \quad \text{azaz} \quad h_1^2 = 4r^2 - 4d_1^2,$$

$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = r^2 - d_2^2 \quad \text{azaz} \quad h_2^2 = 4r^2 - 4d_2^2.$$

Így a húrok négyzeteinek összege:

$$h_1^2 + h_2^2 = 8r^2 - 4(d_1^2 + d_2^2).$$

$d_1^2 + d_2^2$ viszont a d_1 és d_2 oldalú téglalap átlójának négyzetével egyenlő, az átló pedig az O középpont és a fix P pont távolsága. Így a húrok négyzetösszege valóban a

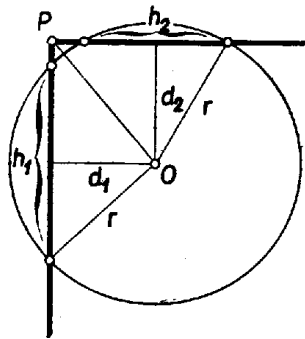
$$8r^2 - 4OP^2$$

állandó értékkel egyenlő, a húrok helyzetétől függetlenül.

Ha az egyik húrt a kör átmérőjének vesszük fel, csak egy derékszögű háromszög keletkezik, és a téglalap egy szakasszá fajul. A levezetés és a tétel viszont érvényes marad ez esetben is, mivel a középponton átmenő húrnak a középponttól való távolsága 0. – Ha P a kör középpontjával esik egybe, állításunk magától értetődő.

Gáspár Mária (Balassagyarmat, Balassa g. I. o. t.)

Megjegyzések: 1. Síkbeli tételünk igaz körön kívül fekvő P pontra is, ha belőle a körhöz két, egymásra merőleges szelőt húzhatunk.



2. ábra

Ha az így húzható szelők a körből h_1 és h_2 húrt metszenek ki, itt is (l. a 2. ábrát):

$$\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = r^2 - d_1^2,$$

$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = r^2 - d_2^2,$$

a két egyenlőség összeadásával

$$h_1^2 + h_2^2 = 8r^2 - 4(d_1^2 + d_2^2).$$

Mivel $d_1^2 + d_2^2 = OP^2$ állandó, állításunkat igazoltuk.

Ha a P pont olyan távol van a körtől, hogy P -ből a körhöz már csak két merőleges érintőt húzhatunk, akkor

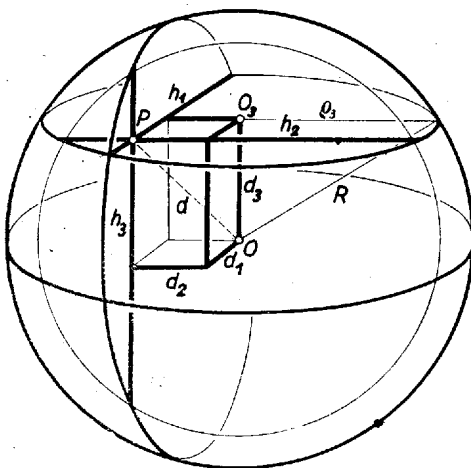
$$OP = r\sqrt{2}.$$

Annak feltétele tehát, hogy a körhöz két egymásra merőleges szelőt húzhassunk, az, hogy

$$OP < r\sqrt{2}.$$

2. Felvetődik a kérdés, igaz-e ilyen értelmű megállapítás a kör térbeli megfelelő alakzatának, a gömbnek húrjaira is? A válasz: igen, *egy gömb belsejében levő ponton áthaladó három, egymásra páronként merőleges gömbi húr négyzetösszege állandó.*

Jelöljük a hurok síkjai által kimetszett gömbi körök sugarait $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ -mal, a gömb sugarát R -rel, a hurok hosszát h_1, h_2 és h_3 -mal, a gömbi körök síkjának távolságát a gömb középpontjától d_1, d_2, d_3 -mal, az OP szakasz hosszát d -vel (3. ábra).



3. ábra

Az előző megoldás szerint:

$$h_1^2 + h_2^2 = 4(2\varrho_3^2 - O_3P^2).$$

Pythagoras-tétele szerint $\varrho_3^2 = R^2 - d_3^2$ és $O_3P^2 = d^2 - d_3^2$.

Tehát $h_1^2 + h_2^2 = 8R^2 - 4(d^2 + d_3^2)$,

ugyanígy

$$h_2^2 + h_3^2 = 8R^2 - 4(d^2 + d_1^2) \quad \text{és} \quad h_3^2 + h_1^2 = 8R^2 - 4(d^2 + d_2^2).$$

Ebből $2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = 24R^2 - 12d^2 - 4(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$.

d_1, d_2, d_3 a 3. ábrán látható téglatest élei. A térbeli Pythagoras-tétel alapján:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = d^2,$$

azaz

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 12R^2 - 8d^2 = 4(3R^2 - 2d^2),$$

ami valóban állandó.

Náray Szabó Gábor (Bp. XI., József A. gimn. I. o. t.)

– Hasonlóan igazolhatjuk, hogy a gömbre általánosított tétel érvényes olyan kívülről fekvő pontokra is, melyekből a gömbhöz 3 egymásra merőleges szelő hozható.