

I. megoldás: A zárójelek felbontásával könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a baloldali tört számlálójában álló $n^3 - 3n - 2$ mennyiség a következő szorzattá alakítható:

$$n^3 - 3n - 2 = (n + 1)^2(n - 2).$$

Ugyanígy a nevezőben:

$$n^3 - 3n + 2 = (n - 1)^2(n + 2).$$

Így a baloldalon álló törtet a következőképpen alakíthatjuk (felhasználva mindjárt a két szám négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot is):

$$(1) \quad \frac{(n + 1)^2(\sqrt{n - 2})^2 + (n - 1)(n + 1)\sqrt{(n - 2)(n + 2)}}{(n - 1)^2(\sqrt{n + 2})^2 + (n - 1)(n + 1)\sqrt{(n - 2)(n + 2)}} =$$

$$= \frac{(n + 1)\sqrt{n - 2}}{(n - 1)\sqrt{n + 2}} \cdot \frac{(n + 1)\sqrt{n - 2} + (n - 1)\sqrt{n + 2}}{(n - 1)\sqrt{n + 2} + (n + 1)\sqrt{n - 2}}$$

A második tört számlálójában és nevezőjében felcserélt sorrendben ugyanaz a két tag áll, így értéke azonosan 1. A kérdéses tört tehát minden n -re $\frac{(n + 1)\sqrt{n - 2}}{(n - 1)\sqrt{n + 2}}$ vel egyenlő. Ezzel épp a kívánt azonosságot igazoltuk.

A bizonyított azonosság (valós számok körében) nincs értelmezve olyan n -ekre, melyekre valamelyik gyök alatt negatív szám áll, vagy a nevező 0 lesz. Az (1) alakból látható, hogy gyök alatt negatív szám nem állhat, ha $n \geq 2$, s ezekre az n -ekre a nevező sem lehet 0.

Máthé Csaba (Győr, Révai g. II. o. t.)

II. megoldás: Az igazolandó azonosság bal oldalát 1-ből levonva

$$(2) \quad \frac{4}{n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4} + 2}$$

adódik. A jobboldalt 1-ből levonva és azután a számlálót gyöktelenítve (annak megfelelően, hogy (2) számlálójában sem fordul elő négyzetgyök csak a nevezőjében):

$$\frac{(n - 1)\sqrt{n + 2} - (n + 1)\sqrt{n - 2}}{(n - 1)\sqrt{n + 2}} =$$

$$= \frac{[(n - 1)\sqrt{n + 2}]^2 - [(n + 1)\sqrt{n - 2}]^2}{(n - 1)\sqrt{n + 2} [(n - 1)\sqrt{n + 2} + (n + 1)\sqrt{n - 2}]} =$$

$$= \frac{(n^2 - 2n + 1)(n + 2) - (n^2 + 2n + 1)(n - 2)}{(n - 1)^2(n + 2) + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}} =$$

$$= \frac{(n^3 - 3n + 2) - (n^3 - 3n - 2)}{n^3 - 3n + 2 + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}} = \frac{4}{n^3 - 3n + 2 + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4}}.$$

Ezzel valóban a (2) kifejezést nyertük. Így a feladatban szereplő azonosság helyes minden olyan n -re, amelyre a szereplő négyzetgyököknek van értelme és amelyekre a nevező nem nulla. Ez fennáll, ha $n \geq 2$.

Perneczky András (Kaposvár, Táncsics g. II. o. t.)