

Alakítsuk át a jobboldalt a következőképpen (közben mindjárt végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket a törtknél a számlálóban – nevezőben):

$$\begin{aligned}4 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) &= 4 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{ac} + \frac{ac}{b^2}\right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) = \\&= 4 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{b^2}.\end{aligned}$$

Mivel

$$4 = 2 \cdot \frac{bc}{bc} + 2 \cdot \frac{ab}{ab},$$

a kifejezés így alakul:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{ab}{ab} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + 2\frac{bc}{bc} + \frac{c^2}{b^2} + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 &= \\&= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2.\end{aligned}$$

Ezzel épp a kívánt azonosságot igazoltuk.

*Zsigmond Balassa* (Győr, Czuczor g. II. o. t.)