

a) A feladat nyilván a pozitív egész számokra vonatkozik. Ezek között 9 egyjegyű szám van. A kétjegyű számok számát megkaphatjuk, ha az 1 és 99 közti összes egészek számából levonjuk az egyjegyűek számát, tehát 90 kétjegyű szám van. Ugyanígy a háromjegyű természetes számok száma $999 - 99 = 900$. Mivel az utolsó $(n - 1)$ -jegyű szám $10^{n-1} - 1$, az utolsó n -jegyű szám pedig $10^n - 1$, ezért az n -jegyű pozitív egészek száma a kettő különbsége:

$$10^n - 1 - (10^{n-1} - 1) = 10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 - 1) = 9 \cdot 10^{n-1}.$$

b) Az n -jegyű számok leírásához szükséges számjegyek számát megkapjuk, ha n -et megszorozzuk az n -jegyű számok számával, $9 \cdot 10^{n-1}$ -nel. így az 1-től 10^n -ig terjedő $(1, 2, 3, \dots, n)$ jegyű számok leírásához szükséges jegyek száma:

$$S_n = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 + \dots + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}.$$

Ezzel a feladatot voltaképpen meg is oldottuk. Megtehetjük még azt, hogy az összeget zárt alakban is előállítjuk. Az a) kérdésnél már láttuk, hogy az n -jegyű számok száma: $9 \cdot 10^{n-1}$ így is írható: $10^n - 10^{n-1}$.

A keresett összeg ennek alapján:

$$S_n = 1(10^1 - 10^0) + 2(10^2 - 10^1) + 3(10^3 - 10^2) + \dots + n(10^n - 10^{n-1}).$$

Bontsuk fel a zárójeleket és 10 egyenlő hatványait vonjuk össze:

$$(1) \quad \begin{aligned} S_n &= -10^0 + (1 - 2)10^1 + (2 - 3)10^2 + \dots + (n - 1 - n)10^{n-1} + \\ &\quad + n \cdot 10^n = n \cdot 10^n - (10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}). \end{aligned}$$

A zárójeles rész egy n -tagú mértani sor, az összegképlet felhasználásával:

$$S_n = n \cdot 10^n - \frac{10^n - 1}{9}.$$

Ezzel az összeget zárt alakban is előállítottuk.

Gáll Endre (Bp. XI., József A. g. I. o. t.)