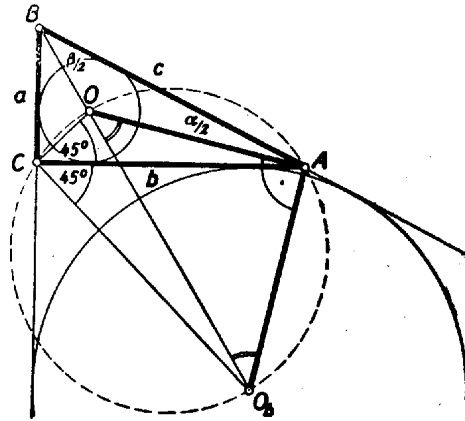


I. megoldás: A két egyenlőség ugyanazt a tételt mondja ki, elég tehát pl. az AO és az AO_b szakaszok egyenlőségét igazolni.

Az 1. ábrán megrajzoltuk a derékszögű háromszöget és az AC oldalhoz a belső és a külső érintő kört.



1. ábra

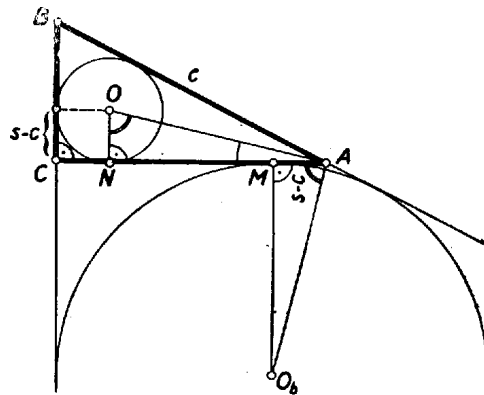
Az O_b körközpont rajt van a derékszögű háromszög A csúcsában levő külső szögfelezőn, azonkívül a B csúcsnál levő β szög szögfelezőjén. Az utóbbi szögfelezőn van rajt az O középpont is, B , O és O_b tehát egy egyenesbe esnek. Az O ezenkívül rajta van az A csúcsban húzott belső szögfelezőn is. Mivel a belső és külső szögfelező merőlegesek egymásra, az AOO_b háromszög derékszögű. A háromszög O -nál levő két íves szöge külső szöge az AOB háromszögnek, nagysága tehát

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ.$$

Így az AOO_b derékszögű háromszög O_b -nél levő harmadik szöge is 45° , a háromszög egyenlő szárú. Az AO és AO_b oldalaik tehát egyenlőek, amint azt állítottuk.

Raisz Klára (Miskolc, Zrínyi Ilona lg. II. o. t.)

II. megoldás: Rajzoljuk meg az O középpontú beírt körnek és az O_b középpontú érintő körnek az AC befogón levő érintési pontját (2. ábra).



2. ábra

Mint ismeretes (s az érintőszakaszok egyenlőségével könnyen bizonyítható) derékszögű háromszögnél a beírt kör sugara az s félkerülettel és a c átfogóval kifejezve.

$$ON = s - c,$$

a kívül írt körnél az AM szakasz hossza ugyanennyi:

$$AM = s - c.$$

AM tehát megegyezik ON -nel. Mivel az AON és az O_bAM háromszögekben a szögek is egyenlőek (merőleges szárú szögek), a két háromszög egybevágó, többi megfelelő oldalaik is megegyeznek:

$$AO = AO_b.$$

III. megoldás: Az 1. ábrán meghúztuk a C csúcsból az O -ba vezető belső, s az O_b -be vezető külső szögfelezőt. Ezek egymással derékszöget zárnak be, s így az $AOCO_b$ négyszög húrnégyszög, hiszen két szemközti szöge 90° -os. AC viszont felezi a húrnégyszög C -nél levő szögét, s így felezi a húrnégyszög köré írt kör A -t tartalmazó OO_b ívét is. Ebből már következik, hogy A valóban egyenlő távol van O -tól és O_b -től.

Náray Szabó Gábor (Bp. XI., József A. g. I. o. t.)

Megjegyzés: A III. megoldásból közvetlenül látszik, hogy a tétel megfordítható a következőképpen. Ha egy háromszög egyik oldalát érintő két kör középpontja az oldal egyik végpontjától egyenlő távolságra van, akkor a háromszögnek az oldal másik végpontjában levő szöge derékszög.