I. megoldás: A feltétel szerint

$$\beta=\alpha+3\gamma=180^\circ-\beta-\gamma+3\gamma=180^\circ-\beta+2\gamma,$$

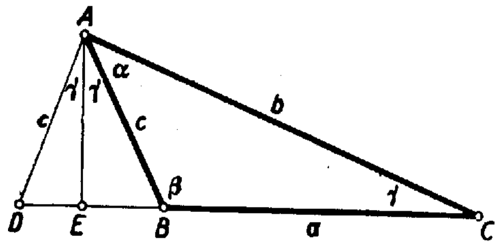
amiből

$$\beta=90^\circ+\gamma, \tag{1}$$

és így

$$\alpha=180^\circ-\beta-\gamma=90^\circ-2\gamma. \tag{2}$$

(1) szerint a háromszög B-nél levő szöge tompaszög. Egészítsük ki háromszögünket úgy, hogy A-ban merőlegest állítunk a b oldalra (1. ábra).



1. ábra

Messe ez az a oldalt D-ben. A $DAB\sphericalangle$ nagysága (2) alapján 2γ. Ha az ADB háromszögben meghúzzuk az AE magasságot, a DAE szög, mint merőleges szárú szög, szintén γ. Az ADB háromszög tehát egyenlő szárú, mivel magassága az A-nál levő 2γ nagyságú szöget felezi. Így $AD=AB=c$.

A Pythagoras-tételből

$$DC=\sqrt{b^2+c^2},$$

az ábráról leolvashatóan

$$a=EC-EB=EC-ED. \tag{3}$$

Az EC és ED távolságokat kiszámíthatjuk a derékszögű háromszögben érvényes befogók és vetületeik közti összefüggésből:

$$EC=\frac{b^2}{\sqrt{^2+c^2}},\qquad ED=\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

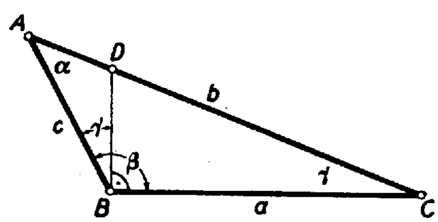
Ezt (3)-ba írva:

$$a=\frac{b^2-c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Ezzel összefüggést találtunk a háromszög oldalai közt.

Elbert Árpád (Kaposvár, Közgazd. techn. III. o. t.)

II. megoldás: Az előző megoldásban bizonyítottuk, hogy $\beta=90^\circ+\gamma$.



2. ábra

Ha tehát B-ben az a oldalra merőlegest állítunk, az így kapott ADB háromszög B-nél levő szöge γ (l. a 2. ábrát), s két szögük egyezése miatt:

$$ABC_\triangle\sim ADB_\triangle,$$

ezért (l. az ábra jelöléseit)

$$c:AD=b:c\qquad\text{és}\qquad c:BD=b:a,$$

amiből

$$AD = \frac{c^2}{b} \qquad \text{és} \qquad BD = \frac{ac}{b}.$$

De a Pythagoras-tételt alkalmazva CBD derékszögű háromszögre

$$(b - AD)^2 = a^2 + BD^2,$$

AD és BD fenti értékeit beírva és b^2-tel végigszorozva:

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 = a^2(b^2 + c^2).$$

Ezzel összefüggést állapítottunk meg a háromszög oldalai közt. (Látható, hogy ugyanazt az összefüggést kaptuk, mint az I. Megoldásban.)

Endrődy Tamás (Bp. III., Árpád g. II. o. t.)