

A második tényezőtől látható, hogy n csak páros szám lehet. Az egyenlőség baloldalán szereplő szorzat mindkét tényezőjét hozzuk egyszerűbb alakra úgy, hogy az egyes tagokban a nevezőt gyöktelenítjük. A közös nevező az első tényezőben 1, a másik tényezőben 2 lesz. A számlálókban elvégezzük az összevonásokat. Ekkor n -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \cdots \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2} + \sqrt{n^2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 1}}{1} \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{2}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 2}}{2} \right) = \\ & = \frac{-\sqrt{1} + \sqrt{n^2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{2} = (n - 1) \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = 45. \end{aligned}$$

Ebből

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot 45}}{2},$$

azaz

$$n_1 = 10 \quad \text{és} \quad n_2 = -9.$$

A feladat megoldásának csak az $n_1 = 10$ gyök felel meg, tehát van olyan pozitív szám, amelyre a feladat kikötése teljesül.

Perneczky Gábor (Kaposvár, Táncsics g. I. o. t.)

Megjegyzés: Felmerül a kérdés, vajon a feladatban szereplő 45 kitüntetett szám-e, vagy más A értékhez is található-e alkalmas n , és ha igen, akkor milyen értékekhez.

Ahhoz, hogy a keresett n természetes szám legyen, kell hogy a megoldás során kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa teljes négyzet, mégpedig páratlan szám négyzete legyen, vagyis A -nak a következő egyenletnek kell eleget tennie:

$$1 + 8A = (2l + 1)^2,$$

ebből

$$A = \frac{(2l + 1)^2 - 1}{8} = \frac{4l^2 + 4l + 1 - 1}{8} = \frac{l(l + 1)}{2}.$$

A -ra nyert feltételünk így a következőképpen fogalmazható meg: minden olyan A -hoz, amelynek kétszerese két egymásután következő pozitív szám szorzataként írható fel, található olyan alkalmas n természetes szám, hogy a feladatban szereplő szorzat értéke éppen az adott A szám legyen.

Gyene András (Bp. VIII., Széchenyi g. II. o. t.)