

I. megoldás: Ha a gyökök x_1, x_2 , akkor felhasználva a másodfokú egyenlet gyökeinek és együtthatóinak összefüggését:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3p - 2)^2 - 2(-7p - 1) = \\&= 9p^2 + 2p + 6 = \left(3p + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{53}{9}.\end{aligned}$$

A jobb oldal értéke nem-negatív, minimális akkor, ha

$$3p + \frac{1}{3} = 0; \quad \text{azaz} \quad p = -\frac{1}{9}.$$

Mivel ennél a p értéknél az első tag 0, a négyzetösszeg legkisebb értéke

$$\frac{53}{9} = 5\frac{8}{9}.$$

Szász Domokos (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)

II. megoldás: Másféleképp is kiszámíthatjuk a gyökök négyzetösszegét. Az egyenlet két gyöke nyilván kielégíti az egyenletet, tehát:

$$x_1^2 + (3p - 2)x_1 - 7p - 1 = 0$$

és

$$x_2^2 + (3p - 2)x_2 - 7p - 1 = 0.$$

Adjuk össze a két egyenletet és vegyük figyelembe, hogy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -(3p - 2) : \\x_1^2 + x_2^2 &= (3p - 2)^2 + 2(7p + 1) = \\&= 9p^2 + 2p + 6 = \left(3p + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{53}{9}.\end{aligned}$$

A megoldás további menete azonos az I. megoldásával.

Szatmári Gábor (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)