

I. megoldás: Kifejezésünkben a számláló és a nevező minden tagjából $\sqrt[3]{6}$ kiemelhető:

$$\frac{5\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{6}(5 - 2\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{6}(4\sqrt[3]{2} + 2)} = \frac{5 - 2\sqrt[3]{2}}{2(2\sqrt[3]{2} + 1)}.$$

A nevező racionális lesz, ha megszorozzuk $(4\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1)$ -gyel, mert hiszen $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$:

$$\begin{aligned} \frac{5 - 2\sqrt[3]{2}}{2(2\sqrt[3]{2} + 1)} &= \frac{(5 - 2\sqrt[3]{2})(4\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1)}{2(2\sqrt[3]{2} + 1)(4\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1)} = \\ &= \frac{20\sqrt[3]{4} - 8 \cdot 2 - 10\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4} + 5 - 2\sqrt[3]{2}}{2(16 + 1)} = \frac{24\sqrt[3]{4} - 12\sqrt[3]{2} - 11}{34}. \end{aligned}$$

Ezzel a kitűzött célt el is értük, a nevezőt „gyöktelenítettük”.

Tusnádý Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth g. II. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük kifejezésünknek $\sqrt[3]{6}$ -tal egyszerűsített alakját, amelyből még az $\frac{1}{2}$ szorzót is elhagytuk:

$$\frac{5 - 2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2} + 1}.$$

Próbáljuk ezt a törtet olyan alakra hozni, hogy a nevező egyetlen racionális szám legyen, a számláló pedig $\sqrt[3]{2}$ -nek legfeljebb második hatványát tartalmazza, azaz – az osztást az együtthatóknál mindjárt elvégzettnek képzelve – törtünk ilyen alakú legyen:

$$\frac{5 - 2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2} + 1} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

Végigszorozva a nevezővel:

$$\begin{aligned} 5 - 2\sqrt[3]{2} &= 2a\sqrt[3]{2} + 2b\sqrt[3]{4} + 4c + a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = \\ &= (2a + b)\sqrt[3]{2} + (2b + c)\sqrt[3]{4} + (4c + a). \end{aligned}$$

A jobb- és baloldalak együtthatóinak összehasonlításából látható, hogy ez csak akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned} 5 &= a + 4c \\ -2 &= 2a + b \\ 0 &= 2b + c. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a = -\frac{11}{17} \quad b = -\frac{12}{17} \quad c = \frac{24}{17}.$$

Ezt visszahelyettesítve látjuk, hogy a szerepelő tört racionális nevezőjű alakja ugyanaz, mint előbb.

Bayer Magda (Bp. XX., Bagi I. lg. II. o. t.)