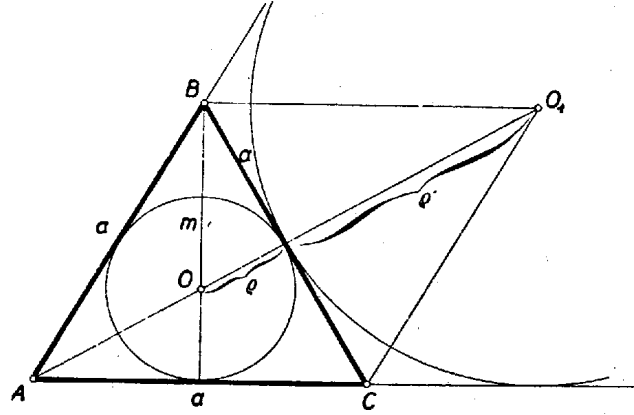


I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Egyenlő oldalú háromszögben a szögfelezők, a súlyvonalak és a magasságvonalak egybeesnek, és így $\rho = \frac{m}{3}$.

Mivel a külső szögfelezők a belsőkre merőlegesek, és így a szemközti oldalakkal párhuzamosak, azért ABO_1C paralelogramma, vagyis $\rho' = m$. Tehát

$$\rho'(\rho + \rho') = m\left(\frac{m}{3} + m\right) = \frac{4m^2}{3} = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} = a^2,$$

ami bizonyítandó volt.

Halász Gábor (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Mivel az ABO_1C paralelogrammának két szomszédos oldala $AB = AC = a$, azért a paralelogramma rombusz, és így $BO_1 = a$, és az átlók egymásra merőlegesek. A külső és belső szögfelezők merőlegesek egymásra, tehát az $OBO_1\Delta$ derékszögű. Ismert tétel szerint a $BO_1 = a$ befogó mértani középárányos az egész átfogó ($OO_1 = \rho + \rho'$) és a befogónak az átfogón levő merőleges vetülete (ρ') között, vagyis

$$a^2 = (\rho + \rho')\rho',$$

ami bizonyítandó volt.

Hornyánszky Tamás (Bp. VIII.; Piarista g. I. o. t.)