

A legegyszerűbb olyan egyenlet, amelynek gyöke $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0,$$

de ennek együtthatói természetesen nem mind egész számok.

Vigyük az általános tagot a jobb oldalra, és emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Az együtthatók még mindig nem megfelelők, de

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

alakba írva, és mindkét oldalt négyzetre emelve

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 24,$$

vagyis

$$(1) \quad x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

egyenletben az együtthatók egész számok, és $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ kielégíti az egyenletünket.

Megmutatjuk, hogy negyedfokúnál alacsonyabb fokú egyenlet nem tehet eleget feltételeinknek.

Elsőfokú egyenlet nem jöhet számításba, mert egész együtthatós elsőfokú egyenlet gyöke mindig racionális.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

másodfokú egyenlet esetén behelyettesítéskor $\sqrt{6}$ *csak* az x^2 -ben szerepel, és mivel $a \neq 0$, azért nem létezhetik olyan másodfokú egyenlet, melynek $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gyöke volna.

A harmadfokú egyenlet általános alakja

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Mivel $x^3 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$, azért $\sqrt{6}$ ismét *csak* a másodfokú tagban szerepel, tehát szükségképpen $b = 0$. De akkor

$$\begin{aligned} 11\sqrt{2}a + 9\sqrt{3}a + \sqrt{2}c + \sqrt{3}c + d &= \\ = \sqrt{2}(11a + c) + \sqrt{3}(9a + c) + d &= 0, \end{aligned}$$

ami csak úgy állhat fenn, ha $a = c = d = 0$.

Tehát az (1) alatti negyedfokú egyenlet a legalacsonyabb fokú, amely feltételeinknek eleget tesz.

Raisz Klára (Miskolc, Zrínyi I. lg. I. o. t.)