

I. megoldás: Vezessük be a következő új ismeretleneket:

$$u = \sqrt[3]{76 + \sqrt{x}}, \quad v = \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}},$$

azaz

$$(1) \quad u^3 = 76 + \sqrt{x},$$

$$(2) \quad v^3 = 76 - \sqrt{x}.$$

(1) és (2) összege

$$(3) \quad u^3 + v^3 = 152.$$

Az eredeti egyenletből

$$(4) \quad u + v = 8.$$

(3)-at elosztva (4)-gyel

$$u^2 - uv + v^2 = 19,$$

(4) négyzete

$$(5) \quad u^2 + 2uv + v^2 = 64.$$

(5) és (4) különbsége

$$3uv = 45, \quad \text{vagyis} \quad uv = 15,$$

tehát

$$u^3 v^3 = (76 + \sqrt{x})(76 - \sqrt{x}) = 15^3,$$

vagyis

$$76^2 - x = 15^3,$$

ahonnan

$$x = 76^2 - 15^3 = 5776 - 3375 = 2401.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy x ezen értéke kielégíti egyenletünket.

Simonfai László (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát köbre emelve a baloldal köbe:

$$\begin{aligned} 76 + \sqrt{x} + 3 \left(\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}} + 3 \sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt[3]{76 - \sqrt{x}} \right)^2 + 76 - \sqrt{x} = \\ = 152 + 3 \sqrt[3]{76^2 - x} \cdot \left(\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}} \right) = 152 - 24 \sqrt[3]{76^2 - x}. \end{aligned}$$

Így a

$$\begin{aligned} 152 + 24 \sqrt[3]{76^2 - x} &= 8^3 = 512, \\ \sqrt[3]{76^2 - x} &= \frac{512 - 152}{24} = 15. \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk. Innen köbre emelés után x -et kifejezve azt kapjuk, hogy csak

$$x = 76^2 - 15^3 = 5776 - 3375 = 2401$$

lehet az egyenlet megoldása. Könnyű számítás mutatja, hogy ez az érték valóban kielégíti az egyenletet.