

Megmutatjuk, hogy ha x értékét behelyettesítjük a (2) egyenlet bal oldalába, akkor eredményül $(a - b)$ -et, azaz a jobb oldalt kapjuk.

A számítás egyszerűbb, ha az x -et és a (2) bal oldalát előbb egyszerűbb alakra hozzuk.

Legyen $\sqrt{\frac{a}{b}} = a (> 1)$, tehát

$$(1') \quad x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right).$$

A (2) bal oldalán gyöktelenítsük a nevezőt, vagyis bővítsük a törtet $(x + \sqrt{x^2 - 1})$ -gyel. Mivel $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = x^2 - (x^2 - 1) = 1$, azért (2) bal oldala

$$(2') \quad 2b(\sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Számítsuk ki először a négyzetgyök alatti $x^2 - 1$ értékét:

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \right) - 1 = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2}{4} = \left(\frac{a - \frac{1}{a}}{2} \right)^2,$$

azaz

$$(3) \quad \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \quad (a > 1 \text{ miatt}).$$

(1') és (3)-ból

$$(4) \quad x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) = a$$

(3) és (4) alapján a (2) egyenlet bal oldala

$$(2') \quad 2b \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) a = b(a^2 - 1) = b \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = a - b,$$

ami bizonyítandó volt.

Somkuti Piroska (Bp. I. Szilágyi E. lg. II. o.t.)

Megjegyzés: Könnyen meggyőződhetünk, hogy állításunk igaz $b < a < 0$, vagy $a = b \neq 0$ esetén is.