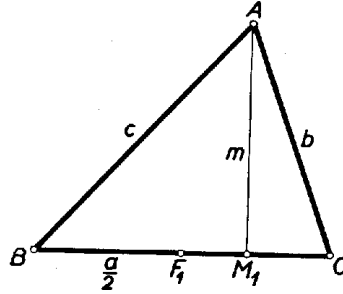


I. megoldás: Legyen az ABC_{Δ} hegyesszögű (1. ábra).



1. ábra

Írjuk fel a Pythagoras-tételt az AM_1B_{Δ} , ill. AM_1C_{Δ} -ben:

$$c^2 = \left(\frac{a}{2} + M_1F_1\right)^2 + m^2,$$

$$b^2 = \left(\frac{a}{2} - M_1F_1\right)^2 + m^2.$$

A második egyenletet kivonva az elsőből

$$c^2 - b^2 = 2a \cdot M_1F_1.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Teljesen hasonló a bizonyítás tompaszögű háromszögre is.

Megjegyzések: 1) Nyilvánvalóan igaz a tétel $b = c$ esetben is, mert akkor $M_1 = F_1$.

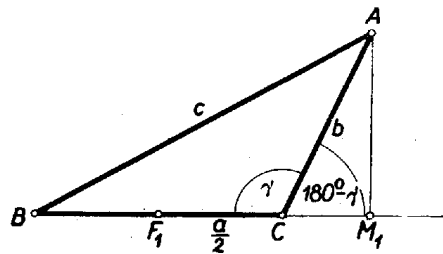
2) $\gamma = 90^\circ$ esetén $M_1 \equiv C$ vagyis $M_1F_1 = CF_1 = \frac{a}{2}$ és így

$$c^2 - b^2 = 2a \cdot \frac{a}{2} = a^2.$$

Bizonyított tételünk tehát a Pythagoras-tétel egy általánosításának tekinthető általános háromszögre.

Sikabonyi György (Bp. VIII., Kandó híradásip. t. I. o. t.)

II. megoldás: Tekintsünk most tompaszögű háromszöget (2. ábra).



2. ábra

A cosinus-tétel szerint

$$c^2 - b^2 = a^2 - 2ab \cos \gamma,$$

$$F_1M_1 = \frac{a}{2} + b \cos(180^\circ - \gamma) = \frac{a}{2} - b \cos \gamma.$$

Ebből

$$2a \cdot F_1M_1 = a^2 - 2ab \cos \gamma,$$

tehát

$$c^2 - b^2 = 2a \cdot F_1M_1.$$

A bizonyítás hegyesszögű háromszög esetén ugyanígy elvégezhető.

Stark Gáspár (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)