

a) A keresett egyenlet gyöktényezőző alakja, az ismeretlent y -nal jelölve

$$\left(y - \frac{1}{x_1^3}\right) \left(y - \frac{1}{x_2^3}\right) = 0.$$

y hatványai szerint rendezve

$$y^2 - \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} y + \frac{1}{x_1^3 x_2^3} = 0,$$

vagyis

$$(1) \quad y^2 - \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3} y + \frac{1}{(x_1 x_2)^3} = 0.$$

Ismeretes, hogy

$$(2) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve megkapjuk a keresett egyenletet:

$$c^3 y^2 + (b^3 - 3abc)y + a^3 = 0.$$

b) Felhasználhatjuk közvetlenül a keresett

$$Ay^2 + By + C = 0$$

egyenletre a gyökök és együtthatók között fennálló összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= -(y_1 + y_2) = -[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2] = -2(x_1^2 + x_2^2) = -2(x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 \\ \frac{C}{A} &= y_1 y_2 = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a (2) alatti értékeket, a keresett egyenlet

$$y^2 + \left(\frac{4c}{a} - \frac{2b^2}{a^2}\right) y + \frac{b^4}{a^4} - \frac{4c}{a} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

vagyis

$$a^4 y^2 + 2a^2(2ac - b^2)y + b^2(b^2 - 4ac) = 0.$$

(Figyeljük meg: ha az eredeti egyenlet diszkriminánsa $b^2 - 4ac = 0$, akkor $x_1 - x_2 = 0$, vagyis y_1 is nullával egyenlő, azaz a keresett egyenlet általános tagja 0, ami tényleg igaz.)

Trón Lajos (Debrecen, Fazekas g. I. o. t.)