

Feltéve, hogy $x \neq 1, 2, 3, 4, 5$, szorozhatjuk mindkét oldalt az öt nevező szorzatával. x hatványai szerint rendezve:

$$(2) \quad \begin{aligned} & (a+b-3)x^4 + (-14a-10b+34)x^3 + (71a+35b-135)x^2 + \\ & + (-154a-50b+224)x + (120a+24b-120) = \\ & = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0. \end{aligned}$$

Ez az egyenlet közvetlenül másodfokúvá, vagy másodfokúra visszavezethetővé válik a következő esetekben:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & A = B = 0, \\ \beta) \quad & D = E = 0, \\ \gamma) \quad & B = D = 0, \\ \delta) \quad & A = E = 0. \end{aligned}$$

Tekintsük sorra ezeket az eseteket.

$$\alpha) \quad \begin{aligned} a + b - 3 &= 0, \\ 7a + 5b - 17 &= 0. \end{aligned}$$

Innen $a = 1$, $b = 2$, mely értékeket (2)-be helyettesítve az

$$x^2 - 5x + 8 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek nincs valós gyöke, mert diszkriminánsa $25 - 32 < 0$.

$$\beta) \quad \begin{aligned} 77a + 25b - 112 &= 0, \\ 5a + b - 5 &= 0, \end{aligned}$$

ahonnan

$$a = \frac{13}{48}, \quad b = \frac{178}{48}.$$

Ezen értékeket (2)-be helyettesítve:

$$11x^4 - 75x^3 + 142x^2 = x^2(11x^2 + 75x + 142) = 0.$$

Innen $x_{1,2} = 0$, x_3 , és x_4 nem valós, mert $75^2 - 44 \cdot 142 < 0$.

$$\gamma) \quad \begin{aligned} 7a + 5b - 17 &= 0, \\ 77a + 25b - 112 &= 0, \end{aligned}$$

ahonnan

$$a = \frac{9}{14}, \quad b = \frac{5}{2},$$

és így az

$$x^4 - 13x^2 + 120 = 0$$

egyenlethez jutunk, melynek nincs valós gyöke, mert $169 - 480 < 0$.

$$\delta) \quad \begin{aligned} a + b - 3 &= 0, \\ 5a + b - 5 &= 0, \end{aligned}$$

ahonnan

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2},$$

ami az

$$x^3 - 6x^2 + 11x = x(x^2 - 6x + 11) = 0$$

egyenletre vezet. Ebből $x_1 = 0$, x_2 és x_3 nem valósak, mert a diszkrimináns negatív.

$\varepsilon)$ Ha $a = b = 0$, akkor (2) a következő alakot veszi fel (-1 -gyel való szorzás után):

$$3x^4 - 34x^3 + 135x^2 - 224x + 120 = (x-1)(x-5)(3x^2 - 16x + 24) = 0.$$

Az $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ gyököket eleve kizártuk. Maradnak tehát a

$$3x^2 - 16x + 24 = 0$$

egyenlet gyökei, de ezek sem ($256 - 288 < 0$) valósak.

Ezek a gyökök megegyeznek azokkal, amelyeket akkor kapunk, ha (1)-ben $x \neq 1, 2, 3, 4, 5$ feltétel mellett az a és b paramétereket 0-nak vesszük. Ugyanis akkor

$$-\frac{2}{2-x} + \frac{3}{3-x} - \frac{4}{4-x} = 0.$$

ami a törtek eltávolítása után:

$$3x^2 - 16x + 24 = 0.$$

Tehát az $a = b = 0$ esetén is másodfokú egyenletre jutunk.

Természetesen a és b még más értékei esetén is lehet egyenletünket másodfokúra visszavezetni, de már csak bonyolultabb átalakításokkal.

Komlósi Ferenc (Makó, József A. g. II. o. t.)