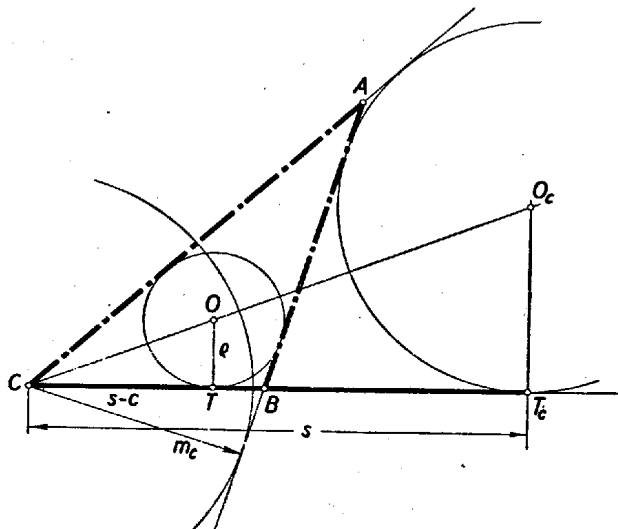


I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak és rajzoljuk meg az ABC háromszög beírt és a c oldalhoz hozzáírt körét. Lásd az 1. ábrát, amely egyben a betűzést is mutatja.



1. ábra

Ismeretes, hogy a C csúctól T , ill. T_c érintési pontok $s - c$, ill. s távolságra vannak, hol s a félkerület.

Az adatokból $s = \frac{d+c}{2}$, és $s - c$ (feltéve, hogy $d > c$) közvetlenül megszerkeszthető.

Már csak ρ megszerkesztésére van szükségünk.

Ismeretes, hogy a háromszög kétszeres területe

$$2t = c \cdot m_c = \rho \cdot s, \text{ ahonnan } s : c = m_c : \rho,$$

és így ρ negyedik arányosként adódik. (Tehát mindig $m_c > \rho$.)

A szerkesztés menete tehát: Felveszünk egy C -ből kiinduló félegyenest, amelyre rámérjük a $CT = s - c$ és $CT_c = s$ távolságokat. CT -re T -ben emelt merőlegesre rámérjük a megszerkesztett $\rho = TO$ szakaszt. A T_c -ben CT -re emelt merőleges, és a CO egyenes metszéspontja O_c . Megrajzolva O és O_c körül az érintő köröket, e két kör másik közös külső érintője lesz a CA oldal hordozója, és egyik belső érintője a BA oldal hordozója. (A másik belső érintő a CO tengelyre szimmetrikus megoldáshoz vezet.)

A megoldhatóság feltétele ($d > c$ -n kívül), hogy a megszerkesztett két érintő-kör ne messe egymást két különböző pontban, mert utóbbi esetben nincs közös belső érintő. Ha a két kör érintkezik, akkor egyenlő szárú háromszöghöz jutunk ($a = b$).

Goldperger István (Balassagyarmat, Balassa g. I. o. t.)

II. megoldás: A hozzáírt kör felhasználása nélkül is célhoz érünk, ha a CTO derékszögű háromszög megszerkesztése után a beírt körhöz megszerkesztjük a C -ből másik érintőt, azután C körül m_c sugárral kört rajzolunk (mint láttuk $m_c > \rho$). A két kör bármelyik közös külső érintője metszi ki a C -ből származó az A és B csúcspontokat (1. ábra).

A megoldhatóság feltétele, hogy $m_c < CO + \rho$, vagyis

$$(1) \quad (m_c - \rho)^2 < CO^2 = (s - c)^2 + \rho^2.$$

De

$$\rho = \frac{m_c c}{2s} = \frac{m_c c}{d + c}, \quad s - c = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{d - c}{2},$$

mely értékeket (1)-be helyettesítve, nyerjük, hogy

$$m_c^2 < \frac{(d - c)^2 (d + c)}{4(d - c)} = \frac{d^2 - c^2}{4}, \quad \text{azaz} \quad m_c < \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{2}.$$

Endrődy Tamás (Bp., III., Árpád g. I. o. t.)

III. megoldás: Induljunk ki az $AB = c$ szakaszból. Mivel $a + b = d$, azért a C pontok mértani helye egy olyan ellipszis, amelynek fél nagytengelye $OP = OQ = \frac{d}{2}$, és a fél kistengelye

$$OR = OS = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{2}.$$

Másrészt a C pontok mértani helye egy AB -vel párhuzamos e egyenes m_c távolságban (2. ábra).



Jelen esetben a legcélszerűbb a kistengely fölé rajzolt k' kört tekinteni az ellipszis affin megfelelőjének. Ez esetben ugyanis a kistengely hordozója az affinitás x tengelye, az affinitás iránya erre merőleges, a nagytengely P végpontjának megfelelője a körön P' , és így az e -nek affin megfelelője e' egybeesik e -vel. Az e' metszi a k' kört C' -ben, az ebben húzott t' érintő metszi a p' érintőt T' -ben, és az x tengely X -ben. T' megfelelője az ellipszis rendszerben, a p -n fekvő T . A TX egyenes metszi ki e -ből a keresett C pontot.

Tatai Péter (Bp., XIV., I. István g. I. o. t.)