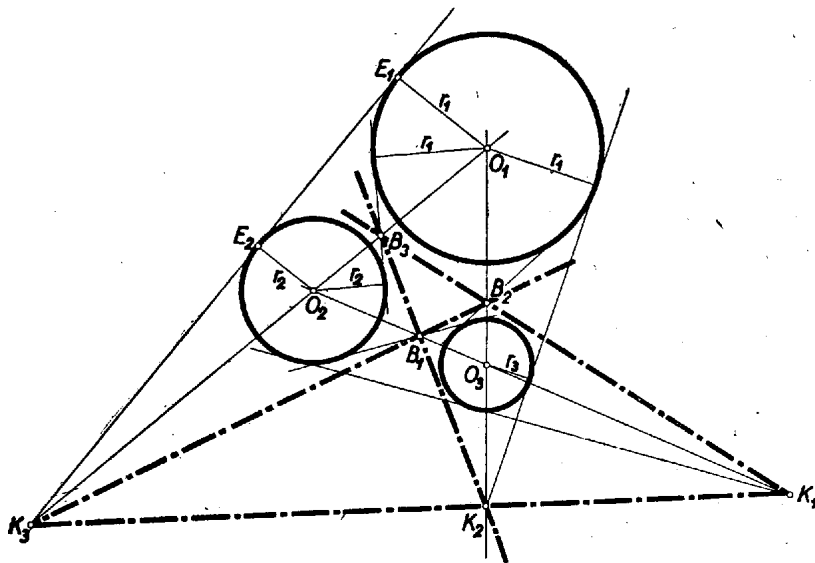


I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Az O_1O_2 centrálison fekvő külső hasonlósági pont K_3 . Nyilvánvaló, hogy

$$K_3E_1O_1\Delta \sim K_3E_2O_2\Delta,$$

és így

$$K_3O_1 : K_3O_2 = r_1 : r_2,$$

amiből következik, hogy K_3 osztó viszonya

$$(O_1O_2K_3) = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Hasonlóképpen

$$(O_2O_3K_1) = -\frac{r_2}{r_3},$$

és

$$(O_3O_1K_2) = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Tehát az $O_1O_2O_3\Delta$ oldalain a K_1, K_2, K_3 pontok által létesített osztó viszonyok szorzata

$$\left(-\frac{r_1}{r_2}\right) \left(-\frac{r_2}{r_3}\right) \left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1,$$

és ebből – a Menelaos-féle tétel megfordítása alapján – következik, hogy K_1, K_2, K_3 egy egyenesen van.

A B_1, B_2, B_3 belső hasonlósági pontok által az $O_1O_2O_3\Delta$ oldalain létesített osztóviszonyok az előbbiekből csak előjelben különböznek. Tehát két belső hasonlósági pont mindegyikére az osztóviszony pozitív, egy külső hasonlósági pontra nézve pedig negatív, tehát a szorzat ismét -1 . Pl.

$$(O_1O_2B_3)(O_2O_3B_1)(O_3O_1K_2) = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1$$

és így B_3, B_1 és K_2 egy egyenesen vannak.

Ezzel a feladat második állítását is bebizonyítottuk.

Ujváry-Menyhárt Zoltán (Baja, Ép. ip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Feladatunk megoldható térbeli megfontolásokkal. Emeljünk az O_1, O_2 és O_3 pontokban a rajz síkjára merőlegeseket, és ezekre mérjük fel a sík mindkét oldalára rendre a r_1, r_2, r_3 szakaszokat, nyerjük a sík egyik oldalán rendre az M_1, M_2, M_3 , a másik oldalán az M'_1, M'_2, M'_3 pontokat.

Ha pl. az M_1M_2 egyenest az O_1O_2 centrális körül a síkba forgatjuk, akkor M_1 és M_2 leforgatásai: (M_1) és (M_2) – az előbbiekre alapján – a k_1 ill. k_2 körre kerülnek és $(M_1), (M_2)$ a két kör közötti hasonlóságban egy megfelelő pontpár, mert $O_1(M_1) \parallel O_2(M_2)$. Tehát az $(M_1) (M_2)$ egyenes átmegy a K_3 külső hasonlósági ponton, de akkor a térbeli M_1M_2 egyenes is K_3 -ban metszi a O_1O_2 forgatási tengelyt.

Ugyanígy bizonyítható, hogy az M_1M_3 egyenes K_2 -ben és az M_2M_3 , egyenes K_1 -ben dőfi a síkot. A K_1, K_2 és K_3 pontok tehát rajta vannak az $[M_1M_2M_3]$ síknak a háromszög síkjával való metszészvonalán.

Ha pl. M_2 helyett tükörképét: M'_2 -t tekintjük, akkor teljesen hasonló gondolatmenettel az $[M_1M'_2M_3]$ síknak a háromszög síkjával való metszészvonalán vannak rajta a B_3, B_1, K_2 pontok.

Vékony Lajos (Bp., XX., Kossuth g. II. o. t.)