

I. megoldás: A súlypont és a súlyvonal fizikai értelmezéséből következnek alábbi tulajdonságaik.

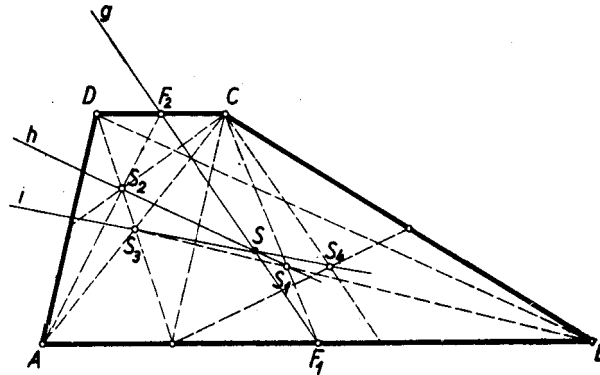
1. Valamely idom súlypontján az idom mindegyik súlyvonala átmegy.

Fordítva: az idom súlypontja rajta van az idom mindegyik súlyvonalán.

2. Ha egy idomot két részre bontunk, s mindkettőnek megszerkesztjük a súlypontját, a két súlypont összekötő egyenes súlyvonala az eredeti idomnak. Ebből következik: ha egy idomból levágunk egy darabot, és megszerkesztjük az eredeti idom és a levágott idom súlypontját, ezek összekötő egyenese a csonkított idomnak is súlyvonala. Továbbá: ha egy idomhoz hozzáillesztünk egy másik idomot és megszerkesztjük a megnövelt idomnak és a hozzáillesztett idomnak a súlypontját, e két súlypont összekötő egyenese az eredeti idomnak is súlyvonala.

Ezek alapján a trapéznek tetszőleges számú súlyvonalát módunkban van megszerkeszteni és bármely két súlyvonal metszéspontja megadja a keresett súlypontot.

Néhány súlyvonal szerkesztését itt adjuk (1. ábra):



1. ábra

a) Hosszabbítsuk meg a trapéz szárait és egészítsük ki a trapézt háromszöggé. A kiegészítő háromszög és a megnövelt idom súlypontjának összekötő egyenese a trapéznek is súlyvonala; ez a két párhuzamos oldal felezőpontjának g összekötő egyenese.

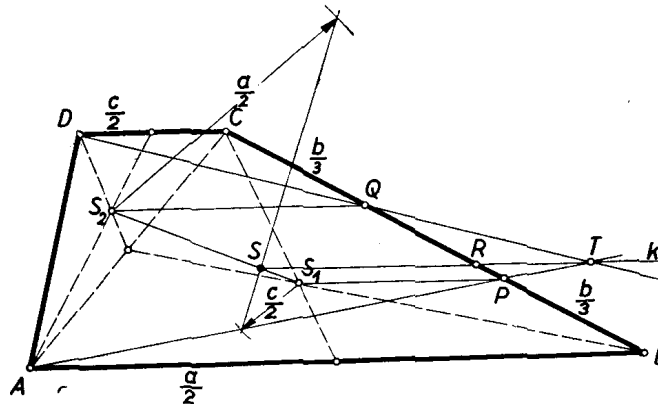
b) Bontsuk a trapézt egyik átlójával két háromszögre, a két háromszög súlypontjának összekötő h egyenese szintén súlyvonala a trapéznek. (E súlyvonal párhuzamos a trapéz másik átlójával, ami abból következik, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalat $2 : 1$ arányban osztja.)

c) Bontsuk szét a trapézt egy paralelogrammra és egy háromszögre, a paralelogramma középpontját kössük össze a háromszög súlypontjával. Ez az i egyenes is súlyvonala a trapéznek, stb.

Bácsy Ernő (Bp. VIII., Fazekas g. II. o. t.)

II. megoldás: Ha az S_1 pontban m_1 tömeget, az S_2 pontban pedig m_2 tömeget képzelünk egyesítve, akkor a két tömeg közös S súlypontja az S_1S_2 egyenesen van, a nagyobb tömeghez közelebb, és S az S_1S_2 szakaszt az m_2 és m_1 tömegek arányában osztja.

Bontsuk fel a trapézt egyik átlójával két háromszögre és szerkesszük meg ezek S_1 és S_2 súlypontját (2. ábra).



2. ábra

Homogén lemezek tömege, tehát e két háromszög tömege is, területükkel arányos. Miután azonban a két háromszög magassága egyenlő, az S_1 , és S_2 -be képzelendő tömegek a kérdéses háromszög alapjaival, tehát a párhuzamos oldalak hosszával arányosak. Eszerint az S súlypontot úgy is nyerhetjük, hogy az S_1S_2 szakaszt a párhuzamos oldalak $c : a$ arányában osztjuk.

III. megoldás: A II. megoldás lehetővé teszi, hogy még két igen egyszerűen megszerkeszthető súlyvonalat találjunk. Az S_1 és S_2 és S pontoknak a párhuzamos oldalakkal párhuzamos vetületei a trapéz BC oldalán legyenek P , Q és R (2. ábra). A szerkesztés szerint P és Q három egyenlő részre osztja BC -t. Az R pont pedig – mint láttuk – a középső $\frac{b}{3}$ hosszúságú PQ szakaszt $c : a$ arányban osztja.

Osszuk megfordítva a BC oldalt a P és Q pontokkal 3 részre. Az AP és DQ egyenesek (2. ábra) messék egymást a T pontban. Azt állítjuk, hogy a T ponton át AB -vel párhuzamosan húzott k egyenes súlyvonal.

Az előbbieket alapján csak azt kell bebizonyítani, hogy a k egyenes a $PQT\Delta$ PQ oldalát olyan R pontban metszi, amelyre nézve

$$\frac{PR}{QR} = \frac{c}{a}.$$

De

$$ABP\Delta \sim TRP\Delta, \quad \text{és így} \quad PR : PB = RT : AB,$$

vagyis

$$PR = \frac{PB \cdot RT}{AB} = \frac{b \cdot RT}{3 \cdot a}.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$QR = \frac{CQ \cdot RT}{CD} = \frac{b \cdot RT}{3 \cdot c}.$$

Tehát $\frac{PR}{QR} = \frac{c}{a}$, ami bizonyítandó volt.

IV. megoldás: A 2. ábráról könnyen leolvasható, hogy

$$BR = \frac{b}{3} + \frac{c}{a+c} \cdot \frac{b}{3} = \frac{b}{3} \left(1 + \frac{c}{a+c} \right) = \frac{b}{3} \cdot \frac{a+2c}{a+c}$$

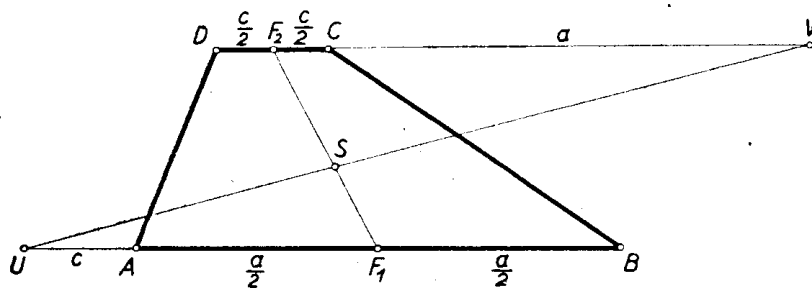
és

$$CR = \frac{b}{3} + \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{3} = \frac{b}{3} \left(1 + \frac{a}{a+c} \right) = \frac{b}{3} \cdot \frac{2a+c}{a+c}$$

tehát

$$\frac{BR}{CR} = \frac{a+2c}{2a+c}.$$

Ez a viszonyszám vezet a következő legegyszerűbb – és ennél fogva a gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott – szerkesztéshez.



3. ábra

Hosszabbítsuk meg az AB oldalt az A -n túl, $AU = c$ -vel, a CD oldalt ellenkező irányban $CV = a$ -val (3. ábra), akkor UV újabb súlyvonal. Az

$$UF_1S\Delta \sim VF_2S\Delta,$$

hasonlóságból ugyanis

$$\frac{F_1S}{F_2S} = \frac{F_1U}{F_2V} = \frac{\frac{a}{2} + c}{\frac{c}{a + \frac{a}{2}}} = \frac{a+2c}{2a+c},$$

amiből az állítás következik.

Szabadits Ödön (Bp. XX., Kossuth g. I. o. t.)

Megjegyzés: A hiányos megoldásokban legtöbbnyire az indoklás hiányzott. Volt néhány helytelen megoldás is azzal az állítással, hogy a területfelező egyenes súlyvonal, holott ez csak akkor igaz, ha a félterületek súlypontjai a felező egyenestől egyenlő távolságra vannak. Helytelen megoldás az is, hogy a trapéz négy csúspontjára ható párhuzamos irányú egyenlő erők támadópontját szerkesztjük. Ez a négy csúspontból álló rendszer súlypontja, de nem a trapézé.