

Induljunk ki az

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

azonosságból. Innen a baloldal második tagját elhagyva és 2-vel osztva, valós a és b esetén

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2.$$

Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget az $a = x + \frac{1}{x}$ és $b = y + \frac{1}{y}$ esetén.

A két oldalt felcserélve.

Figyelembevétel az $x + y = 1$ feltételt

$$(1) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2,$$

ahol ez egyenlőség jele csak akkor áll fenn, ha $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$.

A jobboldal akkor a legkisebb, ha $\frac{1}{xy}$ a legkisebb.

Ismeretes, hogy két pozitív szám mértani középátlósága kisebb a számtani középátlóságnál, tehát esetünkben

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

ahonnan

$$(2) \quad \frac{1}{xy} \geq 4$$

és az egyenlőség jele csak $x = y$ esetén áll fenn, amely esetben azonban (1)-ben is az egyenlőség jele érvényes.

(2) figyelembevételével (1) így írható

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

Az egyenlőség jele akkor áll, ha $x = y = \frac{1}{2}$.

Ádám Antal (Bp. VIII., Széchenyi g. II. o. t.)