

I. megoldás: Egyenletünk mindkét oldalát köbre emelve

$$\sqrt{5} + x + 3\sqrt{(\sqrt{5} + x)^2(\sqrt{5} - x)} + 3\sqrt{(\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x)^2} + \sqrt{5} - x = 5\sqrt{5}.$$

Összevonva és 3-mal egyszerűsítve

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5} + x)^2(\sqrt{5} - x)} + \sqrt[3]{(\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x)^2} = \sqrt{5}.$$

A baloldalon a közös tényezőt kiemelve

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x)} \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} + x} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - x} \right) = \sqrt{5}.$$

Ezt az eredeti egyenlettel osztva

$$\sqrt[3]{5 - x^2} = 1,$$

amiből

$$5 - x^2 = 1,$$

és így

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2.$$

Mivel mindenütt azonos átalakítást végeztünk (a köbgyökvonás a valós számok körében egyértelmű), azért a nyert gyökök ki is elégítik az eredeti egyenletet.

Próba:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} &= \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{5} + 16}{8}} = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1}{8}} = \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

és így tényleg

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}.$$

Grell Mihály (Bp. XVI., Corvin Mátyás g. II. o. t.)

II. megoldás: Legyen

$$\sqrt[3]{\sqrt{5} + x} = u, \quad \sqrt[3]{\sqrt{5} - x} = v,$$

akkor nyilván

$$(1) \quad u^3 + v^3 = 2\sqrt{5}.$$

A feladat értelmében

$$(2) \quad u + v = \sqrt{5}.$$

(1)-et osztva (2)-vel

$$(3) \quad u^2 - uv + v^2 = 2.$$

(2) négyzete

$$(4) \quad u^2 + 2uv + v^2 = 5.$$

(4) és (3) különbsége

$$3uv = 3, \quad \text{azaz} \quad uv = 1,$$

és így

$$u^3 v^3 = (\sqrt{5} + x)(\sqrt{5} - x) = 5 - x^2 = 1,$$

amiből

$$x = \pm 2.$$

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)