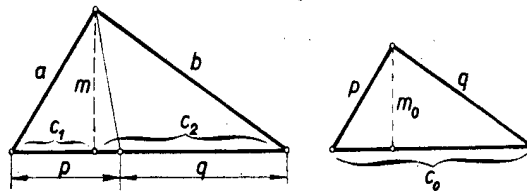


I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ismeretes, hogy

$$(1) \quad m = \sqrt{c_1 c_2}.$$

c_1 és c_2 -t kell az adott p és q -val kifejezni. Ez közvetlenül nem sikerül, de tudjuk c_1 és c_2 -t előbb a befogókkal kifejezni és aztán felhasználhatjuk a szögfelező tételét, mely szerint

$$(2) \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Ismeretes továbbá, hogy

$$(3) \quad a^2 = c_1 c$$

$$(4) \quad b^2 = c_2 c.$$

(3)-at elosztva (4)-gyel, (2) figyelembe vételével

$$(5) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{p^2}{q^2},$$

másrészt

$$(6) \quad c_1 + c_2 = p + q.$$

(5) és (6)-ból c_1 és c_2 , és így $c_1 c_2$ is meghatározható.

(5)-ből

$$c_1 = \frac{c_2 p^2}{q^2},$$

mely értéket (6)-ba helyettesítve

$$\frac{c_2 p^2}{q^2} + c_2 = p + q,$$

amiből

$$c_2 = \frac{(p+q)q^2}{p^2+q^2}, \quad \text{és így} \quad c_1 = \frac{(p+q)p^2}{p^2+q^2}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve

$$m = \sqrt{\frac{(p+q)^2 p^2 q^2}{(p^2+q^2)^2}} = \frac{(p+q)pq}{p^2+q^2}.$$

Grell Mihály (Budapest, XVI., Corvin Mátyás g. II. o.)

II. megoldás: A szögfelező tétel alapján

$$(1) \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{b}, \quad \text{vagyis} \quad a = \lambda p \quad \text{és} \quad b = \lambda q,$$

ahol λ az arányossági tényező.

Írjuk fel a derékszögű háromszög kétszeres területét kétféleképpen:

$$2t = ab = cm.$$

(1) felhasználásával és tekintetbe véve, hogy $c = p + q$

$$\lambda^2 pq = (p+q)m,$$

amiből

$$(2) \quad m = \lambda^2 \frac{pq}{p+q}.$$

Már csak λ^2 meghatározására van szükség. Ez Pythagoras tételének felhasználásával történhetik:

$$\lambda^2 p^2 + \lambda^2 q^2 = (p+q)^2,$$

ahonnan

$$\lambda^2 = \frac{(p+q)^2}{p^2 + q^2}.$$

λ^2 ezen értékét (2)-be helyettesítve

$$m = \frac{(p+q)^2}{p^2 + q^2} \cdot \frac{pq}{p+q} = \frac{(p+q)pq}{p^2 + q^2}.$$

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. I. o. t.)

III. megoldás: A szögfelező tétel alapján a p és q befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög hasonló az eredetihez (1. ábra).

A kis háromszög kétszeres területe

$$2t_0 = pq = m_0 c_0 = m_0 \sqrt{p^2 + q^2},$$

amiből

$$m_0 = \frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

A két háromszög hasonlósága miatt

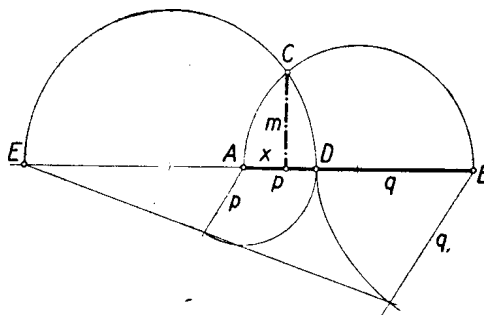
$$m : m_0 = c : c_0,$$

vagyis

$$m = m_0 \frac{c}{c_0} = \frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \frac{p+q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{(p+q)pq}{p^2 + q^2}.$$

Gerőfy Klára (Ózd, József Attila g. III o. t.)

IV. megoldás: Arra a kérdésre, hogy »mekkora« a magasság, szerkesztéssel is felelhetünk. Induljunk ki a $p+q = AB$ átfogóból (2. ábra).



2. ábra

A derékszögű háromszög C csúcspontjának mértani helye, egyrészt az átfogó fölé rajzolt Thales-kör, másrészt az AB távolsághoz tartozó $\frac{p}{q}$ aránynak megfelelő Apollonius-féle kör. E két kör metszéspontjának, C -nek távolsága az átfogótól a keresett m magasság.

Kim Ju Szon (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

Megjegyzés: A szerkesztés alapján ki is számíthatjuk m -et a következő módon.

Az Apollonius-körből adódik

$$\frac{EA}{EB} = \frac{DA}{DB} = \frac{p}{q}, \quad \text{azaz} \quad q \cdot EA = p(EA + p + q).$$

Innen

$$EA = \frac{p(p+q)}{q-p}, \quad EB = \frac{q(p+q)}{q-p}.$$

A húrok szeleteinek szorzatát a két kör közös húrjára alkalmazva

$$\begin{aligned}m^2 &= x(p+q-x) = (p+q)x - x^2, \\m^2 &= (p-x)(EA+x) = \frac{p^2(p+q)}{q-p} - \frac{2p^2}{q-p}x - x^2.\end{aligned}$$

A kettőt összehasonlítva nyerjük, hogy

$$\frac{q^2+p^2}{q-p}x = \frac{p^2(p+q)}{q-p}, \quad x = \frac{p^2(p+q)}{p^2+q^2}, \quad p+q-x = \frac{q^2(p+q)}{p^2+q^2},$$

és így

$$m^2 = \frac{p^2(p+q)}{p^2+q^2} \cdot \frac{q^2(p+q)}{p^2+q^2}, \quad m = \frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}.$$