

I. megoldás: Az

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

azonosság mindkét oldalából vonjuk ki az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ összeget, de a jobboldalon úgy csoportosítva a tagokat, hogy $\frac{1}{2k}$ -ből vonjuk ki az $\frac{1}{k}$ -t

($k = 1, 2, \dots, n$).

Így kapjuk

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{2n-1} + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \\ &+ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Ebből azonban tételünk helyessége közvetlenül leolvasható, hiszen a jobboldal első tagja $\frac{1}{2}$, míg az összes többi tag pozitív.

Farkas László (Ózd, József A. g. II. o, t.)

II. megoldás: Teljes indukcióval is célhoz érünk.

$$s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2}. \\ s_{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} &= \\ = s_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} &= s_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \\ &= s_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > s_k > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De mivel $k = 2$ -re, mint láttuk, $s_2 > \frac{1}{2}$, azért tételünk minden 1-nél nagyobb természetes számra igazolt.

Szeidl Béla (Bp, VIII., Apáczai Csere g. II, o, t.)

III. megoldás: Az

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

összeget csökkentjük, ha minden $\frac{1}{2n}$ -től különböző tag helyébe (ilyen mindig van, ha $n > 1$) a kisebb $\frac{1}{2n}$ -t írjuk, tehát

$$s_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Csiszár Imre (Budapest, I., Petőfi g. II, o, t.)