

I. megoldás: Mindenképpen fennáll, hogy

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

ahol az egyenlőség jele csak $a = b$ esetén érvényes.

Mindkét oldalhoz ab -t adva

$$ab < a^2 - ab + b^2.$$

Mivel a feladat szerint $a + b > 0$, azért mindkét oldalt $(a + b)$ -vel szorozva

$$(a + b)ab \leq (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Tagokra bontva

$$a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3,$$

ami bizonyítandó volt, feltéve, hogy $a > 0$, $b > 0$.

Megjegyzés: A fordított út is követhető, de mindenkor rá kell mutatni, hogy egyértelműen megfordítható átalakításokat végeztünk.

Bánhidny Kálmán (Debrecen, Ref. g. II. o. t.)

II. megoldás: Egyenlőtlenségünk így is írható

$$a^2b - a^3 \leq b^3 - ab^2,$$

vagyis

$$a^2(b - a) \leq b^2(b - a),$$

azaz

$$0 \leq (b^2 - a^2)(b - a).$$

Mivel a feladat szerint $a > 0$, $b > 0$, azért $b \geq a$ maga után vonja, hogy $b^2 \geq a^2$, és így a jobboldal két tényezőjének előjele mindig egyezik, vagyis szorzatuk pozitív. Egyenlőség csak $b = a$ esetén.

Nagy József (Kecskemét, Katona J. g. II. o. t.)