

I. megoldás: Legyenek a háromszög oldalai a, b, c , a megfelelő magasságok m_a, m_b, m_c , a kerülete $a + b + c = 2s$, a területe t , a beírt kör sugara ϱ . Bizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{2\varrho} < \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} < \frac{1}{\varrho}.$$

Mivel ismeretes, hogy $am_a = bm_b = 2s\varrho = 2t$, azért egyenlőtlenségünk így írható

$$\frac{s}{2t} < \frac{a}{2t} + \frac{b}{2t} < \frac{s}{t}.$$

$4t$ -vel szorozva

$$2s = a + b + c < 2a + 2b < 4s = 2a + 2b + 2c,$$

vagyis

$$c < a + b < a + b + 2c.$$

Ez nyilvánvalóan igaz, és mivel egyértelműen megfordítható, átalakításokat végeztünk, azért a kiindulásunk helyesége be van bizonyítva.

Győrösi Péter (Bp., IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás: Az előbbieket alapján

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} = \frac{a}{2t} + \frac{b}{2t} = \frac{a+b}{2s\varrho} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

De nyilván

$$\frac{a+b}{a+b+c} < 1,$$

és (mivel $c < a + b$)

$$\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+(a+b)} = \frac{1}{2},$$

és így

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} < \frac{1}{\varrho}.$$

III. megoldás: Induljunk ki a következő nyilvánvalóan helyes egyenlőtlenségekből

$$s < a + b < 2s.$$

Osszuk $2t$ -vel

$$\frac{s}{2t} < \frac{a}{2t} + \frac{b}{2t} < \frac{s}{t}.$$

De ismeretes, hogy

$$\frac{t}{s} = \varrho, \quad \frac{2t}{a} = m_a, \quad \frac{2t}{b} = m_b$$

és így

$$\frac{1}{2\varrho} < \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} < \frac{1}{\varrho}.$$

Orlik Péter (Bp., V., Eötvös g. II. o. t.)