

I. megoldás: Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2(1+x)^4$ -nel ($x \neq -1$) és a jobboldalt alakítsuk át polinommá

$$2 + 2x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4,$$

azaz

$$(1) \quad x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Osszuk az egyenletet x^2 -tel ($x \neq 0$) és csoportosítsuk át a tagokat:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} - 6 = 0,$$

vagyis

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Legyen $x + \frac{1}{x} = y$, akkor $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$,

és így

$$y^2 - 2 - 4y - 6 = 0,$$

vagyis

$$y^2 - 4y - 8 = 0,$$

amiből

$$y_1 = 2 + 2\sqrt{3}, \quad y_2 = 2 - 2\sqrt{3}.$$

Az első esetben

$$x + \frac{1}{x} = 2 + 2\sqrt{3},$$

vagyis

$$x^2 - (2 + 2\sqrt{3})x + 1 = 0,$$

ahonnan

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}.$$

A második esetben

$$x + \frac{1}{x} = 2 - 2\sqrt{3},$$

azaz

$$x^2 - (2 - 2\sqrt{3})x + 1 = 0,$$

amiből

$$x_3 = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3 - 2\sqrt{3}}, \quad x_4 = 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3 - 2\sqrt{3}}.$$

Az x_1 és x_2 nyilván valós gyök, míg x_3 és x_4 komplex gyök, mert $3 - 2\sqrt{3} < 0$.

Szeidl Béla (Bp., VIII., Apáczai Csere g. II. o. t.)

Megjegyzés: x_3 és x_4 kiszámítása nélkülözhető lett volna; mert tudjuk, hogy pozitív x -re $x + \frac{1}{x} > 2$, negatív x esetén tehát $x + \frac{1}{x} < -2$, viszont $-2 < 2 - 2\sqrt{3} < -1$, mert $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ -re, $3 < \sqrt{12} < 4$. Így valós x -re nem lehet $x + \frac{1}{x} = 2 - 2\sqrt{3}$.

II. megoldás: Az I. megoldásban (1) alatt szereplő szimmetrikus egyenlet mindkét oldalához $12x^2$ -et adva, a baloldal teljes négyzetté válik:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 12x^2,$$

azaz

$$(x^2 - 2x + 1)^2 = 12x^2,$$

amiből

$$x^2 - 2x + 1 = \pm 2\sqrt{3}x.$$

A jobboldalon a felső előjelet tekintetbe véve:

$$x^2 - (2 + 2\sqrt{3})x + 1 = 0, \quad \text{azaz} \quad \left[x - (1 + \sqrt{3})\right]^2 - 2\sqrt{3} - 3 = 0,$$

az alsó előjellel számolva

$$x^2 - (2 - 2\sqrt{3})x + 1 = 0, \quad \text{azaz} \quad \left[x - (1 - \sqrt{3})\right]^2 + 2\sqrt{3} - 3 = 0.$$

Az első egyenlet gyökei tehát valósak: $x_{1,2} = 1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2\sqrt{3} + 3}$, a másodikéi azonban nem, mert $2\sqrt{3} > 3$.

Bartha Gyöngyi (Bp., VIII., Apáczai Csere g. I. o. t.)