

a) Az $x = a$, $x = b$ értékeket kizárva, az egyenlet mindkét oldalát $(x - a)(x - b)$ -vel szorozva

$$(x + a)(x - b) + (x - a)(x + b) = 2(x - a)(x - b),$$

vagyis

$$2x(a + b) = 4ab,$$

amiből

$$x = \frac{2ab}{a + b}.$$

Ennek csak akkor van értelme, ha $a + b \neq 0$.

Helyettesítsük be x ezen értékét az eredeti egyenlet jobb oldalába és bővítsük a törtet $(a + b)$ -vel ($a + b \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{2ab + a^2 + ab}{2ab - a^2 - ab} + \frac{2ab + ab + b^2}{2ab - ab - b^2} &= \frac{a + 3b}{b - a} + \frac{3a + b}{a - b} = \frac{-a - 3b + 3a + b}{a - b} = \\ &= \frac{2(a - b)}{a - b} = 2, \end{aligned}$$

feltéve, hogy $a - b \neq 0$.

Ha $a - b = 0$, vagyis $a = b$, akkor egyenletünk

$$\frac{x + a}{x - a} = 1,$$

ami ellentmondás, ha $a(=b) \neq 0$; és azonosság, ha $a(=b) = 0$. Az $a = 0$ $b \neq 0$ (vagy fordítva) feltevés is ellentmondásra

vezet: $\frac{x + b}{x - b} = 1$.

Tehát egyenletünknek $x = \frac{2ab}{a + b}$ gyöke, feltéve, hogy $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$, $a \neq 0$, és $b \neq 0$, vagyis a paraméterek 0-tól különböző mennyiségek, amelyeknek abszolút értékei is különbözők.

b) Az $a = 0$, $b = 0$, $x = 0$ értékeket kizárva, mindkét oldalt abx -szel szorozva

$$cdx - a^2b^2c + abdx = abc^2,$$

amiből

$$x = \frac{abc(ab + c)}{d(ab + c)} = \frac{abc}{d}$$

feltéve, hogy $ab + c \neq 0$, $d \neq 0$ és (mivel $x \neq 0$) $c \neq 0$.

Ha $ab + c = 0$, vagyis $ab = -c$, akkor egyenletünk:

$$-d + \frac{c^2}{x} + d = \frac{c^2}{x}$$

azonosság.

Egyébként, ha mind a négy paraméter 0-tól különbözik, az $x = \frac{abc}{d}$ tényleg gyök, amint erről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

Jobboldal:

$$\frac{cd}{ab} - \frac{abcd}{abc} + d = \frac{cd}{ab}.$$

Baloldal:

$$\frac{c^2d}{abc} = \frac{cd}{ab}.$$

Zsombok Zoltán (Bp., IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)