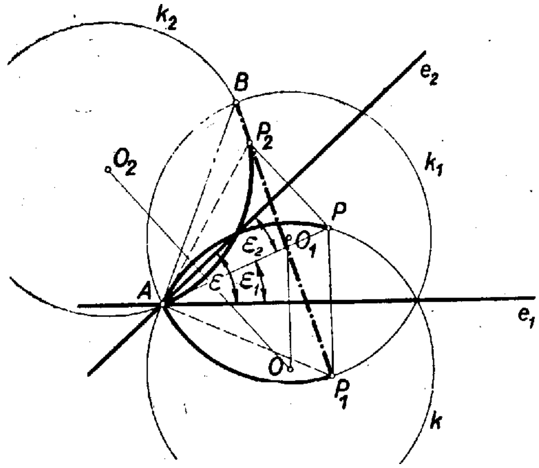
I. megoldás: Legyen a két egyenes e_1 és e_2. Miközben a P pont egy, a két egyenes A metszéspontján átmenő, k kört írt le, tükörképei P_1, ill. P_2 ezen k körnek tükörképeit: a k_1 és k_2 kört írják 1e (1. ábra).



1. ábra

A k_1 és k_2 körök A-n kívül még egy B pontban metszik egymást, mely B pont a k, k_1, k_2 körökkel és az A ponttal együtt rögzített állandó.

Ha kimutatjuk, hogy a B, P_1 és P_2 pontok egy egyenesen vannak, akkor tételünket bebizonyítottuk.

Két esetet kell megkülönböztetni:

1. P_1 és P_2 az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak (1. ábra), vagy

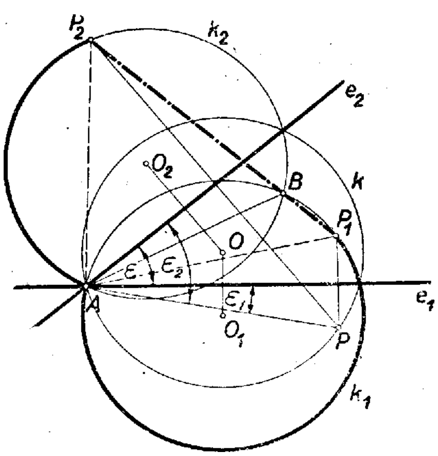
2. az AB egyenes a P_1 és P_2, pontokat szétválasztja (2. ábra).

Mivel a tükrözés folytán

(1) $$\widehat{AP} = \widehat{AP}_1 = \widehat{AP}_2$$

(1. ábrán vastagítva), azért az

1. esetben (1. ábra) a kerületi szögek tétele alapján $ABP_1\sphericalangle = ABP_2\sphericalangle$. E két egyenlő szögnek azonban az AB szára közös, tehát közös a másik szára is, vagyis BP_1 és BP_2 azonos egyenesek.



2. ábra

A 2. esetben $ABP_1\sphericalangle$ és $ABP_2\sphericalangle$ olyan köríveken nyugvó kerületi szögek (a 2. ábrán vastagítva), amelyeknek összege (1) alapján egy teljes kör és így ismét a kerületi szögek tétele alapján

$$ABP_1\sphericalangle + ABP_2\sphericalangle = 180^\circ,$$

ami ismét azt jelenti, hogy a B, P_1 és P_2 pontok egy egyenesen feküsznek.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a P_1P_2 egyenes a B pont körül forog.

Györösi Péter (Bp., IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük az e_1 és e_2 egyenesek szögét ε-nal. A tükrözés folytán $AP = AP_1 = AP_2$, vagyis a $P_1AP_2\triangle$ egyenlő szárú és a $P_1\sphericalangle = P_2\sphericalangle$. Az A csúcsnál fekvő szögéről meg fogjuk mutatni, hogy (a P helyzetétől független) állandó. Ugyanis, ha az AP egyenesnek az e_1 illetőleg e_2 vel bezárt hegyes szögeit ε_1 és ε_2-vel jelöljük, akkor a tükrözés miatt $PAP_1\sphericalangle = 2\varepsilon_1$ és a $PAP_2\sphericalangle = 2\varepsilon_2$, vagyis az I. esetben, amikor a P a hegyesszög szárai között van (1. ábra)

$$P_1AP_2\sphericalangle = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 2\varepsilon,$$

míg a II. esetben, mikor a P a tompaszög szárai között van (2. ábra)

$$P_1AP_2\sphericalangle = 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 2\varepsilon.$$

A $P_1AP_2\triangle$ $A\sphericalangle$-e tehát mindenkor 2ε állandó nagyságú, következésképpen a $P_1\sphericalangle = P_2\sphericalangle$ is állandó nagyságú, vagyis P_1AP_2 egyenlőszárú háromszögek egymásközt mind hasonlók. (A P pont mozgásával a $P_1AP_2\triangle$ nagyságra változik, de alakra változatlan marad.)

$AP_1P_2\sphericalangle = AP_2P_1\sphericalangle$ állandó nagyságú szögek P_1A, ill. P_2A szárának a k_1 és k_2 körökkel való metszéspontja az A pont rögzített, tehát a másik száruknak (P_1P_2, illetőleg P_2P_1) metszéspontja a k_1 és k_2 körökkel egy-egy szilárd pont az illető körön. A változó P_1P_2 egyenes csak úgy mehet át állandóan 2 szilárd ponton, ha a 2 szilárd pont egybeesik a k_1 és k_2 közös B pontjában.

Kozma Tibor (Győr, Czuczor Gergely g. I. o. t.)