

Jelöljük a keresett számlálót x^2 -tel. Mivel x nem teljes hatvány, azért van törzstényezői között olyan, amelynek kitevője nem osztható 3-mal. Az ilyen törzstényezők szorzatát b -vel jelölve $x = a^3b$ alakban írható, ahol a és b relatív prím számok és $b \neq 1$.

De $a \neq 1$ természetesen szintén fennáll, mert egyszerűsítés után teljes köbszámot kell kapni, ami $a = 1$ esetén lehetetlen. Tehát feltételeinknek csak olyan számláló felel meg, amely a^6b^2 alakban írható, hol a és b relatív prím, b nem teljes köb és $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Az ilyen alakú számláló viszont *mindig* megfelel.

Mert ha a nem teljes hatvány, akkor elég nevezőként az $a^3b^6c^6$ szorzatot választani, hol b és c , valamint a és c relatív prím, c nem teljes négyzet, de elég nagy, hogy a tört értéke 1-nél kisebb legyen.

Ugyanis

$$\frac{a^6b^2}{a^3b^6c^6} = \frac{(a^3b)^2}{(ab^2c^2)^3} = \frac{a^3}{b^4c^6} = \frac{a^3}{(b^2c^3)^2}.$$

Ha pedig a teljes hatvány, akkor írjuk a -t $m \cdot n$ alakban (ahol esetleg $m = n$) s válasszuk nevezőként az $m^3n^6b^6c^6$ szorzatot. Ez esetben

$$\frac{m^6n^6b^2}{m^3n^6b^6c^6} = \frac{(m^3n^3b)^2}{(mn^2b^2c^2)^3} = \frac{m^3}{b^4c^6} = \frac{m^3}{(b^2c^3)^2}.$$

Tehát feladatunk megoldásai mindazok a 6-jegyű számok, amelyek

$$a^6b^2$$

alakúak, hol a és b relatív prím, $a \neq 1$, $b \neq 1$, és b nem teljes köb.

Mivel a feltétel szerint

$$10^5 < a^6b^2 < 10^6,$$

azért

$$316 < a^3b < 1000,$$

vagyis

$$\frac{316}{a^3} < b < \frac{1000}{a^3}.$$

Ha $a = 2$, akkor $39 < b < 125$, és mivel ezen határok között 42 páratlan b található, melyek közül egy sem teljes köb, azért

$$a = 2 \text{ esetén } b = 41, 43, \dots, 123$$

(42 megoldás),

$$\text{Ugyanúgy nyerjük } a = 3 \text{ esetén } b = 13, 14, 16, 17, 19, \dots, 35, 37$$

(17 megoldás),

$$a = 4 \text{ esetén } b = 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

(6 megoldás),

$$a = 5 \text{ esetén } b = 3, 4, 6, 7$$

(4 megoldás),

$$a = 6 \text{ esetén nincs megfelelő } b, \text{ mert } 2, 3, \text{ és } 4 \text{ nem}$$

relatív prím 6-hoz.

(0 megoldás),

$$a = 7 \text{ esetén } b = 2$$

(1 megoldás).

$$a > 7 \text{ esetén már nem találunk megoldást. Tehát az összes megoldások száma: } 70.$$

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)