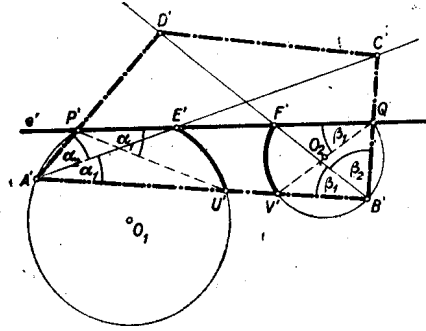


I. Megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. Az átlók a négyszög $A\triangleleft$ ill. $B\triangleleft$ -ét α_1 és α_2 ill. β_1 és β_2 , szögekre osztják oly módon, hogy a PE távolság A -ból α_2 szög alatt, az FQ távolság pedig B -ből β_2 szög alatt látszik.

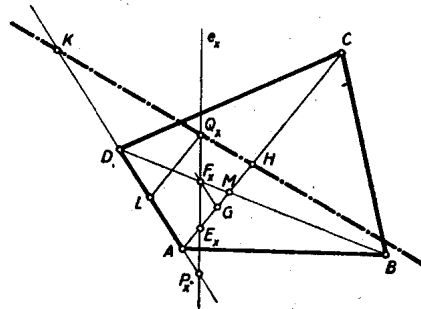


1. ábra

Mivel e szögek a négyszöggel együtt adottak, azért a fentiek alapján könnyen szerkeszthetünk az adott négyszöghöz hasonló $A'B'C'D'$ négyszöget valamely e' egyenesen tetszőlegesen felvett $P'E' = E'F' = F'Q'$ távolságokhoz.

A szerkesztés menete: A $P'E'$ és $F'Q'$ távolságokhoz megszerkesztjük az A' , illetőleg B' -pontok mértani helyét, azaz az α_2 , ill. β_2 kerületi szögeknek megfelelő, O_1 ill. O_2 középpontú látóköríveket az e' egyenes ugyanazon az oldalán (1 ábra). A keresett $A'B'$ egyenes a két látókörívből – az A' és B' -n kívül – kimetszi az U' , ill. V' pontokat. Az $E'U'$ és $F'V'$ körívekhez tartozó kerületi szögek: α_1 , ill. β_1 , adottak, tehát U' és V' könnyen megszerkeszthetők. Az $U'V'$ egyenes metszi ki a két látókörívből második metszéspontként az A' és B' csúcspontot. Az $A'E'$ és $B'F'$ egyenesek szolgáltatják az $A'B'C'D'$ négyszög átlóit, míg $A'P'$, ill. $B'Q'$ lesznek a keresett négyszöghöz hasonló $A'B'C'D'$ négyszög oldalainak hordozói. Az így nyert négyszöget (a $P'E'F'$ és Q' pontokkal együtt) valamilyen hasonlósági centrumból tehetjük a megadott a négyszöggel egybevágóvá.

Orlik Péter (Bp., V., Eötvös g. II. o. t.)



2. ábra

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja. Egyelőre tekintsünk el attól, hogy a Q pont rajta legyen a BC oldalon, hanem határozzuk meg a Q pontok mértani helyét, ha az e egyenes mozog úgy, hogy a rajta fekvő P , E , F pontok az AD oldalon, illetőleg az AC és BD átlókon mozognak olyan módon, hogy mindig $PE = EF = FQ$.

Vegyünk fel az AC átlón egy tetszőleges E_x pontot. Legyen $AE_x = x$. Ha $AG = 2x$ és G -n át AD -vel húzott párhuzamos a BD átlót F_x -ben metszi, akkor az $E_xF_x = e_x$ egyenes nyilván olyan P_x pontban metszi az AD oldalt, hogy $P_xE_x = E_xF_x$. Az e_x tehát a mozgó e egyenesnek egy – az x távolsággal jellemzett – helyzete. Vegyük fel az e_x -en a Q_x pontot úgy, hogy $F_xQ_x = E_xF_x$ és az AC átlón a H pontot úgy, hogy $MH = \frac{AM}{2}$. A Q_x -en át az AC átlóval húzott párhuzamos messe az AD oldalt L -ben, a Q_xH egyenes pedig ugyancsak az AD oldalt K -ban. Jelöljük a KD távolságot y -nal. Fejezzük ki y -t az adott távolságokkal. Mivel $AP_xE_{x\Delta} \simeq GF_xE_{x\Delta}$, azért $AP_x = GF_x$, továbbá $GF_x : AD = MG : MA$.

Az egyszerűség kedvéért legyen $AD = d$, $MA = e$, akkor $MG = e - 2x$, és így

$$GF_x = \frac{d(e - 2x)}{e}.$$

$Q_xL : x = P_xQ_x : P_xE_x = 3 : 1$, vagyis $Q_xL = 3x$,
továbbá

$$P_xL = 3AP_x = 3GF_x, \quad \text{és így} \quad AL = 2GF_x = \frac{2d(e - 2x)}{e}.$$

Végül

$$KL = KA - AL = y + d - \frac{2d(e - ex)}{z},$$

de

$$Q_x L : AH = KL : KA,$$

vagyis

$$3x : \frac{3e}{2} = \left(y + d - \frac{2d(e-2x)}{e} \right) : (y + d).$$

Ebből:

$$xy + xd = \frac{ey}{2} + \frac{de}{2} - d(e - 2x),$$

azaz

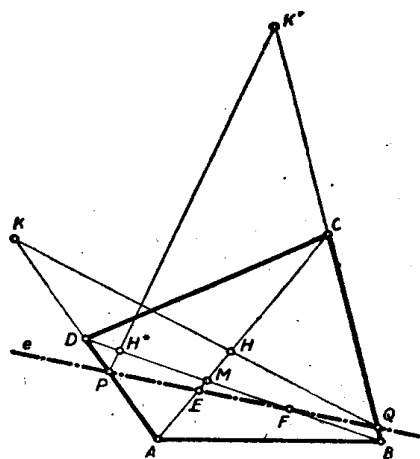
$$y \left(x - \frac{e}{2} \right) = 2dx - de + \frac{de}{2} - dx = d \left(x - \frac{e}{2} \right),$$

és így

$$y = d,$$

Tehát y (és ezzel a K pont helyzete) független x -től, vagyis a HQ_x , egyenesek állandóan átmennek a szilárd K ponton, és mivel a H pont is szilárd, azért a Q_x pontok mértani helye a HK egyenes.

A szerkesztés menete: Megszerkesztjük $DK = AD$ és $MH = \frac{AM}{2}$ alapján a K és H pontokat (3. ábra).

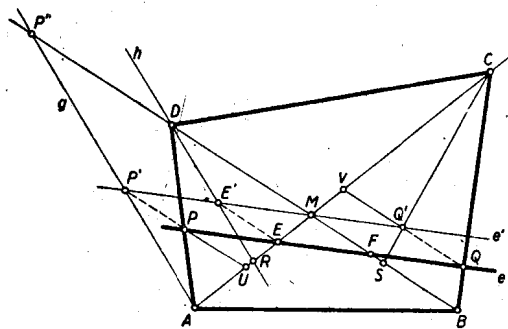


3. ábra

A KH egyenes metszi ki a BC oldalból a keresett Q pontot. Hasonlóképpen megszerkesztve $CK^* = BC$ és $MH^* = \frac{BM}{2}$ alapján a K^* és H^* pontokat, a K^*H^* egyenes és az AD oldal metszéspontja szolgáltatja a keresett P pontot.

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. II. o. t.)

III. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak és toljuk el az e egyenest önmagával párhuzamosan a BD átló mentén, amíg az F pont M -be, az e egyenes e' -be kerül (4. ábra).



4. ábra

Akkor a Q , E és P pontok Q' , E' , P' -be kerülnek és messe a PP' és QQ' az AC átlót az U , ill. V pontban.

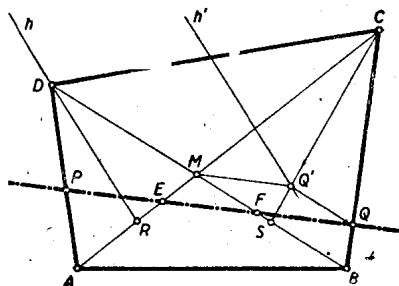
Mivel $MEE'_\Delta \simeq EUP_\Delta$, azért $UP = EE' = PP'$.

Ha U az AC átlón, P az AD oldalon mozog úgy, hogy $UP \parallel BD$ mindig fennáll, akkor a P' pont leírja az $AP' = g$ egyenest. Ugyanakkor az $MP' = e'$ egyenes M körül forog és az MP' távolság E' felezőpontja leírja a g egyenessel

párhuzamos h egyenest. Ha P a g egyenesen való mozgása közben eléri a g és BD metszéspontját, P'' -t, akkor a P pont (az AD oldalon) D -be ér, az U pont pedig (az AC átlón) M -be kerül. Tehát $MD = DP''$, amiből következik, hogy az MP' távolság felezőpontja E' (a h egyenesen mozogva) is D -be kerül. Ha P' mozgása közben (U -val és P -vel együtt) A -ba kerül, akkor E' nyilván az AM távolság R felezőpontjában lesz. Tehát az E' pont pályája, a h egyenes nem más, mint az RD egyenes, amely tehát könnyen megszerkeszthető.

Hasonlóképpen mivel $MEE'_\Delta \simeq MVQ'_\Delta$ azért $VQ' = EE' = QQ'$, amiből következik, hogy ha Q végighalad a CB oldalon és V a CA átlón, úgy, hogy $VQ \parallel BD$ állandóan fennáll, akkor Q' leírja a CS egyenest, ahol S a BM távolság felezőpontja.

A szerkesztés menete: Megszerkesztve E' és Q' mértani helyét, amelyek – amint láttuk – nem mások, mint az AMD_Δ , ill. BMC_Δ -nek DR , ill. CS súlyvonala, már csak az marad hátra, hogy CS -n Q' -t úgy határozzuk meg, hogy $Q'M = ME'$ legyen. E célból a $DR = h$ egyenesnek megszerkesztjük az M pontra nézve a h' tükörképét, amely kimetszi a CS egyenesből a keresett Q' pontot. Q' -n át BD -vel húzott párhuzamos metszi ki a BC oldalon a keresett Q pontot, amelyen át $Q'M$ -mel húzott párhuzamos a keresett e egyenes (5. ábra).



5. ábra

Rázga Tamás (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)