

Minden egyes esetben megállapítjuk a 10 számjegyből a feltételeknek megfelelően, képezhető *csoportok* számát. E szám $\frac{9}{10}$ -ed része fogja megadni képezhető *számok* keresett számát, mert a 0-val kezdődő csoportoktól (az összes csoportok $\frac{1}{10}$ -részétől) el kell tekinteni.

a) 10 számjegyből egy számjegyet C_{10}^1 félképpen választhatunk ki. A kiválasztott számjegyből csak 1 öt elemből álló csoport alakítható. Tehát csupa egyenlő számjegyből álló ötjegyű számok száma

$$\frac{9}{10} C_{10}^1 = \frac{9}{10} \binom{10}{1} = \frac{9}{10} \cdot 10 = 9.$$

b) 10 számjegyből 2 különböző számjegyet C_{10}^2 félképpen választhatunk ki. A kiválasztott 2 elemet a, b -vel jelölve, az összes képezhető ötelemű csoportok a következő füzetek $abbbb, aabbb, aaabb, aaaab$ permutációi. Ez utóbbiak száma $2(P_5^4 + P_5^{3,2})$. Eszerint a 2 különböző számjegyet tartalmazó öt jegyű számok száma:

$$\frac{9}{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot 2 \left(\frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!2!} \right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 2(5 + 10) = 81 \cdot 15 = 1215.$$

c) 3 különböző jegy esetén a következő füzetek: $aaabc, abbbc, abccc, aabbc, abbcc$ permutációi adják az összes alakítható 5 elemű csoportokat. Ezek száma tehát $3(P_5^3 - 1 - P_5^{2,2})$ és így a különböző számjegyből álló összes ötjegyű számok száma:

$$\frac{9}{10} \cdot \binom{10}{3} \cdot 3 \left(\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!2!} \right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3(20 + 30) = 324 \cdot 50 = 16\,200.$$

d) Hasonlóképpen 4 különböző jeggyel alakítható ötjegyű számok száma:

$$\frac{9}{10} \cdot C_{10}^4 \cdot 4 \cdot P_5^2 = \frac{9}{10} \binom{10}{4} 4 \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 \cdot 60 = 756 \cdot 60 = 45\,360.$$

e) 5 különböző jegyből pedig

$$\frac{9}{10} C_{10}^5 P_5 = \frac{9}{10} \binom{10}{5} 5! = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$$

ötjegyű szám képezhető. (Ez utóbbiak száma egyébként a 10 elemből alakítható 5-öd osztályú variációk számának $\frac{9}{10}$ -ed része:

$$\frac{9}{10} V_{10}^5 = \frac{9}{10} 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216.$$

Megjegyzés: A fenti, a), b), c), d), e) alatti ötjegyű számok összessége alkotja az összes létező 5-jegyű számokat, amelyeknek száma 90000 ($99999 - 9999$ vagy $\frac{9}{10} V_{10}^{1,5} = \frac{9}{10} \cdot 10^5 = 90000$), és tényleg $9 + 1215 + 16200 + 45360 + 27216 = 90000$.

Schmidt Eligius (Bp. II. Fürst S. g. II. o. t.)

Helytelen megoldások száma: 14. Eltekintve attól, hogy nem mind a 10 számjegyet vették figyelembe, leggyakrabban ismétléses variációkkal dolgoztak, megelégedezvén arról, hogy az n elemből alkotott k -ad osztályú ismétléses variációk között (hiába áll fenn, hogy $k > n$) vannak csoportok, amelyek nem tartalmazzák mind az n elemet, sőt esetleg csak 1 elemet. Továbbá nem tekintettek el a 0-val kezdődő csoportoktól.