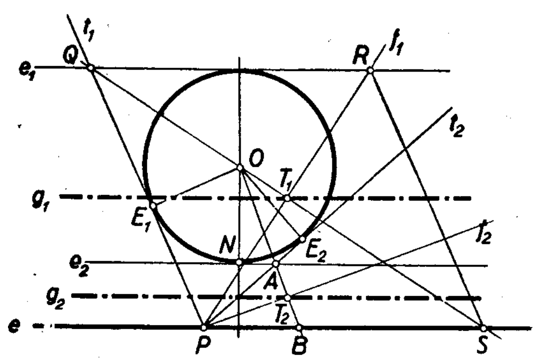
I. megoldás: Jelöljük az adott kör középpontját O-val, az adott egyenest e-vel és az e-n tetszőlegesen felvett pontot P-vel. Szerkesszük meg a körhöz az adott e-vel párhuzamos e_1 és e_2 érintőket (1. ábra)



1. ábra

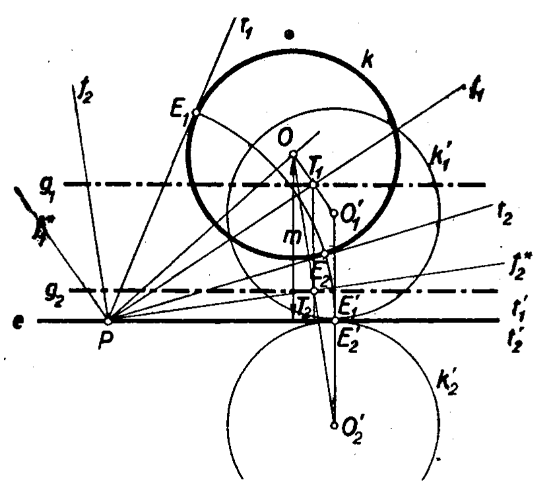
A P-ből a körhöz húzott t_1 érintő messe e_1-et Q-ban, az e és t_1 szögfelezője f_1 pedig messe e_1-et R-ben. A PQR nyilván egyenlő szárú, mert az e és f_1 szöge, mint váltószög egyenlő az f_1 és e_1 által bezárt szöggel. A QO egyenes felezi a Q-ból kiinduló két érintő: t_1 és e_1 szögét és mint ilyen szükségképpen merőleges és felezi a PR alapot. Ha a QO egyenes és e metszéspontját S-sel jelöljük, akkor a $PQRS$ négyszög az előbbiek alapján rombusz. Az O-ből az f_1-re bocsátott merőleges eszerint egyezik a QS rombuszátlóval és e merőlegesnek T_1 talppontja f_1-en pedig azonos a rombusz átlóinak metszéspontjával. Ha P mozog az e egyenesen, akkor a rombusz változik, de a PS, ill. QR rombuszoldalak mindig az e, ilL e_1 egyeneseken maradnak és így a két átló metszéspontja T_1 az e és e_1 párhuzamos egyenesek közét felező g_1 egyenesen mozog. Szóról-szóra ugyanúgy kimutathatjuk – a t_2 érintőt tekintve –, hogy a T_2 pontok rajta vannak azon a g_2 egyenesen, amely az e és e_2 párhuzamos egyenesek közét felezi. A teljes mértani helyet: g_1 és g_2 (végtelen hosszú) egyeneseket, csak akkor kapjuk, ha a másik két szögfelezőt is figyelembe vesszük.

Deseő Zoltán (Bp. V. Berzsenyi g. II. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük t_2 érintési pontját E_2-vel. Az O-ből az e-re bocsátott merőleges messe a kört N-ben. az O-ból az f_2-re bocsátott merőleges talppontja f_2-n T_2; ennek a merőlegesnek metszéspontjai t_2-vel, e-vel legyenek A ill. B (1. ábra). A merőleges szárú szögek tétele alapján az $NOA\sphericalangle = ef_2\sphericalangle = f_2t_2\sphericalangle = E_2OA\sphericalangle$ és így az $ANO_\triangle \simeq AE_2O_\triangle$, mert $ON = OE$ és az OA oldal közös. De az $AE_2O_\triangle$ derékszögű (mert a t érintő merőleges az OE sugárra) és így az $ANO_\triangle$ is derékszögű, tehát $AN \perp ON$, vagyis $AN \parallel e$. Ez azt jelenti, hogy ha P mozog az e-n, az A befutja az e_2 egyenest, a B az e egyenest, és AB felezőpontja T_2 befutja az e_2 és e párhuzamos egyenesek közét felező g_2 egyenest.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. II. o. t.)

III. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Tükrözzük az adott k kört és a t_1, ill. t_2 érintőket az f_1, ill. f_2^* szögfelezőkre nézve, akkor az O tükörképe O_1', ill. O_2', a t_1 és t_2 tükörképei egybeesnek e-vel, úgyszintén egybeesnek E_1 és E_2 érintési pontok tükörképei az e egyenesen és ebben az $E_1' \equiv E_2'$ pontban érintik az adott k kör tükörképei: k_1' és k_2' az e egyenest.

Ha P mozog az e egyenesen az O_1' és O_2' pontok mozognak az e-vel párhuzamos, e-től r távolságban levő egyeneseken, ha r-rel jelöljük az adott kör sugarát. Ha az O pontnak az e-től való távolságát m-mel jelöljük, akkor az OO_1' és OO_2'

távolságok felezőpontjai: T_1 és T_2 is az e-vel párhuzamos g_1 és g_2 egyeneseken mozognak, amelyeknek távolságai e-től:

$$\frac{m+r}{2} \text{ ill. } \frac{m+t}{2} - r = \frac{m-r}{2}.$$

(Ez az eredmény másképpen fejezi ki az I. és II. megoldásban megállapított tényt.)