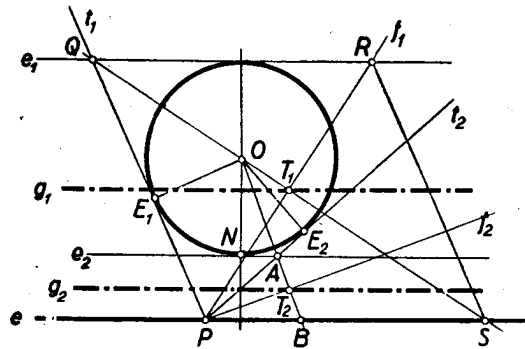


**I. megoldás:** Jelöljük az adott kör középpontját  $O$ -val, az adott egyenest  $e$ -vel és az  $e$ -n tetszőlegesen felvett pontot  $P$ -vel. Szerkesszük meg a körhöz az adott  $e$ -vel párhuzamos  $e_1$  és  $e_2$  érintőket (1. ábra)



1. ábra

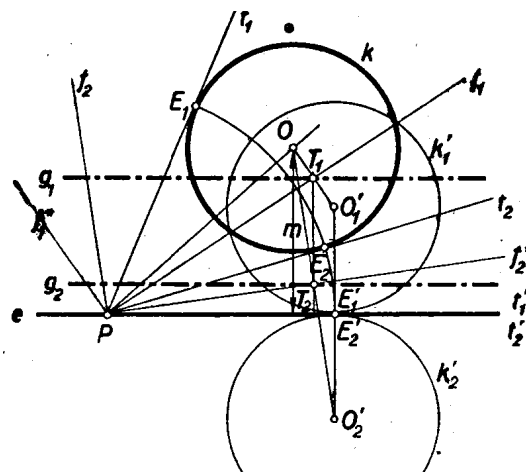
A  $P$ -ből a körhöz húzott  $t_1$  érintő messe  $e_1$ -et  $Q$ -ban, az  $e$  és  $t_1$  szögfelezője  $f_1$  pedig messe  $e_1$ -et  $R$ -ben. A  $PQR$  nyilván egyenlő szárú, mert az  $e$  és  $f_1$  szöge, mint váltószög egyenlő az  $f_1$  és  $e_1$  által bezárt szöggel. A  $QO$  egyenes felezi a  $Q$ -ból kiinduló két érintő:  $t_1$  és  $e_1$  szögét és mint ilyen szükségképpen merőleges és felezi a  $PR$  alapot. Ha a  $QO$  egyenes és  $e$  metszéspontját  $S$ -sel jelöljük, akkor a  $PQRS$  négyszög az előbbieket alapján rombusz. Az  $O$ -ból az  $f_1$ -re bocsátott merőleges eszerint egyezik a  $QS$  rombuszátllóval és  $e$  merőlegesnek  $T_1$  talppontja  $f_1$ -en pedig azonos a rombusz átlójának metszéspontjával. Ha  $P$  mozog az  $e$  egyenesen, akkor a rombusz változik, de a  $PS$ , ill.  $QR$  rombuszoldalak mindig az  $e$ , ill.  $e_1$  egyeneseken maradnak és így a két átló metszéspontja  $T_1$  az  $e$  és  $e_1$  párhuzamos egyenesek között felező  $g_1$  egyenesen mozog. Szóról-szóra ugyanúgy kimutathatjuk – a  $t_2$  érintőt tekintve –, hogy a  $T_2$  pontok rajta vannak azon a  $g_2$  egyenesen, amely az  $e$  és  $e_2$  párhuzamos egyenesek között felezi. A teljes mértani helyzet:  $g_1$  és  $g_2$  (végtelen hosszú) egyeneseket, csak akkor kapjuk, ha a másik két szögfelezőt is figyelembe vesszük.

Deseő Zoltán (Bp. V. Berzsenyi g. II. o. t.)

**II. megoldás:** Jelöljük  $t_2$  érintési pontját  $E_2$ -vel. Az  $O$ -ból az  $e$ -re bocsátott merőleges messe a kört  $N$ -ben. az  $O$ -ból az  $f_2$ -re bocsátott merőleges talppontja  $f_2$ -n  $T_2$ ; ennek a merőlegesnek metszéspontjai  $t_2$ -vel,  $e$ -vel legyenek  $A$  ill.  $B$  (1. ábra). A merőleges szárú szögek tétele alapján az  $NOA \sphericalangle = e f_2 \sphericalangle = f_2 t_2 \sphericalangle = E_2 O A \sphericalangle$  és így az  $ANO \triangle \simeq AE_2 O \triangle$ , mert  $ON = OE$  és az  $OA$  oldal közös. De az  $AE_2 O \triangle$  derékszögű (mert a  $t$  érintő merőleges az  $OE$  sugárra) és így az  $ANO \triangle$  is derékszögű, tehát  $AN \perp ON$ , vagyis  $AN \parallel e$ . Ez azt jelenti, hogy ha  $P$  mozog az  $e$ -n, az  $A$  befutja az  $e_2$  egyenest, a  $B$  az  $e$  egyenest, és  $AB$  felezőpontja  $T_2$  befutja az  $e_2$  és  $e$  párhuzamos egyenesek között felező  $g_2$  egyenest.

Kovács László (Debrecen, Ref. g. II. o. t.)

**III. megoldás:** A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Tükrözzük az adott  $k$  kört és a  $t_1$ , ill.  $t_2$  érintőket az  $f_1$ , ill.  $f_2^*$  szögfelezőkre nézve, akkor az  $O$  tükörképe  $O'_1$ , ill.  $O'_2$ , a  $t_1$  és  $t_2$  tükörképei egybeesnek  $e$ -vel, úgyszintén egybeesnek  $E_1$  és  $E_2$  érintési pontok tükörképei az  $e$  egyenesen és ebben az  $E'_1 \equiv E'_2$  pontban érintik az adott  $k$  kör tükörképei:  $k'_1$  és  $k'_2$  az  $e$  egyenest.

Ha  $P$  mozog az  $e$  egyenesen az  $O'_1$  és  $O'_2$  pontok mozognak az  $e$ -vel párhuzamos,  $e$ -től  $r$  távolságban levő egyeneseken, ha  $r$ -rel jelöljük az adott kör sugarát. Ha az  $O$  pontnak az  $e$ -től való távolságát  $m$ -mel jelöljük, akkor az  $OO'_1$  és  $OO'_2$

távolságok felezőpontjai:  $T_1$  és  $T_2$  is az  $e$ -vel párhuzamos  $g_1$  és  $g_2$  egyeneseken mozognak, amelyeknek távolságai  $e$ -től:

$$\frac{m+r}{2} \text{ ill. } \frac{m+t}{2} - r = \frac{m-r}{2}.$$

(Ez az eredmény másképpen fejezi ki az I. és II. megoldásban megállapított tényt.)